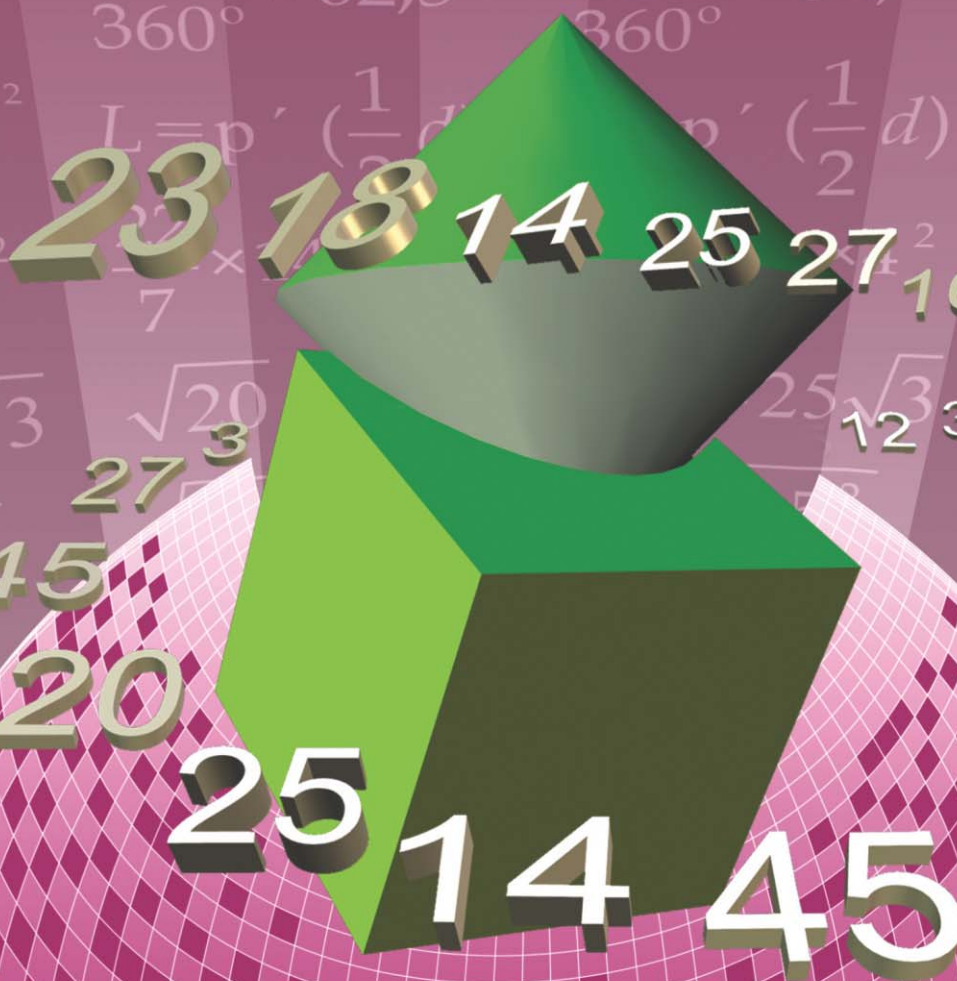


• Sri Lestari • Diah Ayu Kurniasih

MATEMATIKA 3

Untuk SMA/MA Program Studi Bahasa Kelas XII



PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

• Sri Lestari • Diah Ayu Kurniasih

MATEMATIKA

Untuk SMA/MA Program Studi Bahasa Kelas XII



PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

3

Hak Cipta Pada Departemen Pendidikan Nasional
Dilindungi Undang-undang

MATEMATIKA

untuk SMA/MA Kelas XII Program Bahasa

Sri Lestari
Diah Ayu Kurniasih

Editor : Dwi Susanti
Penata letak : Ria Nita Fatimah
Perwajahan : Cahyo Muryono
Ilustrasi isi : Bayu Aryo Dewantho
Penata sampul : Hary Suyadi
Ukuran Buku : 17,6 x 25 cm

510.07

SRI
m

SRI Lestari

Matematika 3 : untuk SMA / MA Program Studi Bahasa Kelas XII
/ Sri Lestari, Diah Ayu Kurniasih; editor, Dwi Susanti
; ilustrasi, Budi Aryo Dewantho. — Jakarta : Pusat Perbukuan,
Departemen Pendidikan Nasional, 2009.
vii, 120 hlm. : illus. ; 25 cm

Bibliografi : hlm. 115

Indeks

ISBN 978-979-068-846-9 (no. jilid lengkap)

ISBN 978-979-068-852-0

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul

II. Diah Ayu Kurniasih III. Dwi Susanti IV. Budi Aryo Dewantho

Hak Cipta Buku ini dibeli oleh Departemen Pendidikan Nasional
dari Penerbit Putra Nugraha,CV

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2009

Diperbanyak oleh

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009
Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Puji syukur senantiasa kami panjatkan ke hadirat Tuhan yang Maha Esa, karena dengan rahmat dan karunia-Nya kami dapat menyelesaikan buku Matematika untuk SMA/ MA dengan lancar dan baik. Buku ini disusun sesuai dengan standar isi kurikulum 2006.

Buku ini disajikan dengan pendekatan pemecahan masalah. Dengan pendekatan ini, diharapkan siswa dapat aktif dan memiliki ketrampilan dalam memahami masalah, membuat model matematika, menyelesaikan masalah, dan menafsirkan solusinya. Selain itu, buku ini juga disajikan dengan bahasa yang sederhana sehingga mudah dipahami oleh para siswa.

Telah kita ketahui bahwa untuk menguasai dan menciptakan teknologi di masa depan diperlukan penguasaan matematika yang kuat sejak dini. Dengan pola penyajian buku ini, diharapkan dapat membantu dan mempermudah pemahaman matematika siswa. Dengan memahami matematika secara komprehensif, siswa akan memiliki sikap ulet dan percaya diri dalam memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Akhirnya kami menyadari bahwa buku ini tidaklah sempurna. Segala kritik dan saran membangun untuk menyempurnakan buku ini sangat kami nantikan. Kepada semua pihak yang membantu terselesainya buku ini, kami ucapkan terima kasih. Semoga buku ini bermanfaat bagi semua pihak. Selamat belajar dan semoga sukses!

Surakarta, Mei 2008

Penulis

Daftar Isi

	Hal
Kata Sambutan	iii
Kata Pengantar	iv
Daftar Isi	v
Daftar Notasi	vi
 Bab 1 Program Linear	 1
A. Sistem Pertidaksamaan Linear	2
B. Nilai Optimum Fungsi Objektif	16
Uji Kompetensi	23
 Bab 2 Matriks	 27
A. Pengertian, Notasi, dan Ordo Suatu Matriks	28
B. Operasi Aljabar Matriks	38
C. Determinan dan Invers Matriks	51
D. Invers Matriks Ordo 3 (pengayaan)	58
Uji Kompetensi	70
 Uji Semester Gasal	 73
 Bab 3 Barisan dan Deret	 79
A. Barisan dan Deret Bilangan	80
B. Barisan dan Deret Aritmetika	84
C. Barisan dan Deret Geometri	94
D. Penerapan Deret Aritmetika dan Deret Geometri	105
Uji Kompetensi	109
 Uji Semester Genap	 111
 Daftar Pustaka	 115
Indeks	116
Glosarium	117
Kunci Jawaban	118
Catatan	121

Daftar Notasi

Notasi	Keterangan
$\text{adj } A$	adjoin matriks A
\in	anggota
$:$	bagi
\dots	bagi
n	banyaknya suku
b	beda
N	bilangan asli
C	bilangan cacah
R	bilangan real
$\det A$	determinan matriks, harga mutlak
a_{mn}	determinan matriks A
z	elemen matriks baris ke- m kolom ke- n
A^{-1}	fungsi objektif
S_{∞}	invers matriks A
S_n	jumlah deret geometri tak hingga
\times	jumlah n suku pertama
c_{ij}	kali
k	kofaktor dari a_{ij}
$<$	konstanta
\leq	kurang dari
$-$	kurang dari atau sama dengan
$-A$	kurang, minus, negatif
$>$	lawan matriks A
\geq	lebih dari
\square	lebih dari atau sama dengan
\lim	lebih kurang
\log	limit
$A_{m \times n}$	logaritma
O	matriks A yang berordo $m \times n$
I	matriks nol
	matriks identitas

Notasi	Keterangan
$ M_{ij} $	minor a_{ij}
	notasi matriks
	notasi matriks
r	rasio
$=$	sama dengan
U_n	suku ke- n
a	suku pertama
U_1	suku pertama
V_t	suku tengah
∞	tak terhingga
$+$	tambah, plus, positif
\neq	tidak sama dengan
A^t	transpose matriks A
A'	transpose matriks A

Bab 1

Program Linear

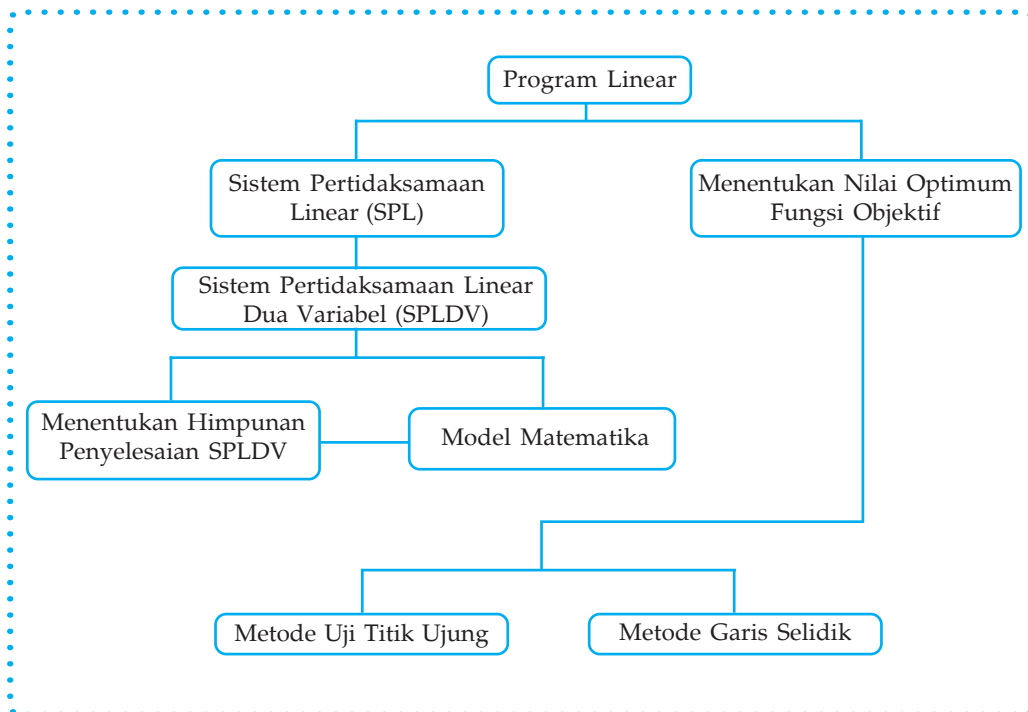
Standar Kompetensi

Menyelesaikan masalah program linear

Kompetensi Dasar

- ❑ Menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dua variabel
- ❑ Merancang model matematika dari masalah program linear
- ❑ Menyelesaikan model matematika dari masalah program linear dan menafsirkan solusinya

Peta Konsep





Sumber: blognya-rita.blogspot.com
Gambar 1.1

Setiap orang atau perusahaan pasti menginginkan keuntungan atau laba sebesar-besarnya dengan alokasi sumber yang terbatas. Sebagai contoh, sebuah perusahaan memproduksi dua model kapal pesiar. Model I membutuhkan waktu 30 jam untuk memotong dan merakit serta 40 jam untuk menyelesaikannya. Model 2 membutuhkan 45 jam untuk memotong dan merakit serta 30 jam untuk menyelesaikannya. Waktu yang tersedia 360 jam untuk memotong dan merakit serta 300 jam untuk menyelesaikannya. Keuntungan bersih untuk setiap unit model I sebesar Rp4.500.000,00 dan model II sebesar Rp6.000.000,00. Apakah Anda dapat menentukan berapa banyak kapal pesiar model I dan model II yang harus diproduksi agar diperoleh keuntungan maksimum?

Kasus di atas adalah salah satu contoh permasalahan program linear. Masalah semacam itu sering kita jumpai dalam dunia usaha, ekonomi, ilmiah, dan sebagainya. Masalah program linear adalah masalah yang berhubungan dengan penentuan maksimum atau minimum suatu fungsi linear dengan kendala-kendala berupa sistem pertidaksamaan linear.

Sebelum mempelajari program linear, kita akan mengingat kembali tentang sistem pertidaksamaan linear. Materi sistem pertidaksamaan linear yang akan kita bahas adalah sistem pertidaksamaan linear dua variabel dan menentukan himpunan penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan linear.

A. Sistem Pertidaksamaan Linear

1. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Contoh 1.1

- $2x + y > 4$
- $x - 3y \geq 5$
- $5x + y < 10$
- $6x - y \leq 11$

Keempat hubungan pada contoh 1.1 memuat dua hal, yaitu:

- terdapat lambang ketidaksamaan, yaitu lebih dari ($>$), lebih dari sama dengan atau tidak kurang dari (\geq), kurang dari ($<$), dan kurang dari sama dengan atau tidak lebih dari (\leq);
- terdapat dua variabel (x dan y) dan masing-masing variabel berpangkat satu (linear).

Sehingga dapat didefinisikan:

Pertidaksamaan linear dua variabel adalah pertidaksamaan yang memuat dua variabel berpangkat satu.

Adapun bentuk umum pertidaksamaan linear sebagai berikut:

$$ax + by > c$$

$$ax + by \geq c$$

$$ax + by < c$$

$$ax + by \leq c$$

dengan x, y variabel dan a, b, c konstanta.

Sekarang, coba perhatikan contoh 1.2 berikut!

Contoh 1.2

- $x + y > 5$ dan $2x - y \geq 4$
- $2x + y \leq 4$, $x - 2y \leq 6$, dan $x + y < 2$

Pada contoh 1.2 terdapat lebih dari satu pertidaksamaan linear dua variabel. Hubungan seperti itu disebut sistem pertidaksamaan linear dua variabel.

Sehingga dapat didefinisikan:

Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah hubungan yang memuat dua atau lebih pertidaksamaan linear dua variabel dengan variabel-variabel yang sama.

Tugas Kelompok

Kerjakan dengan kelompok Anda!

Apakah pertidaksamaan-pertidaksamaan linear di bawah ini membentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel? Jelaskan alasannya!

- $x + 2y < 10$, $2x - y \leq 8$, $x \leq 0$, dan $y \leq 0$
- $a + b \geq 2$ dan $2a - b \geq 4$
- $2x + y \leq 6$, $2a + b \leq 4$, dan $4p - q \leq 8$
- $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} > 8$ dan $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} > 4$

Latihan 1

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Manakah di antara pertidaksamaan–pertidaksamaan di bawah ini yang merupakan pertidaksamaan linear dua variabel?
 - a. $x + 2y - z < 4$
 - b. $x^2 + 2y \geq 8$
 - c. $x + x(y - 2) \leq 6$
 - d. $3x \leq 2 - y$
 - e. $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} > 1$
2. Manakah di antara pertidaksamaan–pertidaksamaan di bawah ini yang membentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel?
 - a. $3x - 4 \leq 6$ dan $x \geq y$
 - b. $x(x + 2) + y \leq 4$ dan $4x - 2y \leq 6$
 - c. $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} \leq 8$ dan $\frac{2x}{3} - 2y < 5$
3. Ubahlah kalimat di bawah ini menjadi bentuk pertidaksamaan linear!
 - a. Harga buku tulis per buah Rp2.000,0 dan harga pensil per buah Rp500,00. Uang yang tersedia Rp9.400,00.
 - b. Untuk menyelesaikan soal A, dibutuhkan 2 menit per itemnya. Sedangkan untuk menyelesaikan soal B dibutuhkan waktu 5 menit per itemnya. Waktu yang tersedia 1,5 jam.

2. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Bagaimana cara menentukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel? Sebelumnya Anda harus mengingat kembali cara menentukan himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan. Perhatikan contoh 1.3 berikut!

Contoh 1.3

Tentukan daerah himpunan penyelesaian $2x - y \leq 6$ dengan $x, y \in R$!

Penyelesaian:

Langkah pertama adalah menggambar grafik $2x - y = 6$ pada bidang Cartesius. Untuk menggambar grafik tersebut, agar lebih mudah, kita harus menentukan titik potong dengan sumbu X dan sumbu Y.

- a. Menentukan titik potong dengan sumbu X, berarti $y = 0$

$$2x - y = 6$$

$$2x - 0 = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

Jadi, titik potong dengan sumbu X adalah (3, 0).

- b. Menentukan titik potong dengan sumbu Y, berarti $x = 0$

$$2x - y = 6$$

$$2(0) - y = 6$$

$$-y = 6$$

$$y = -6$$

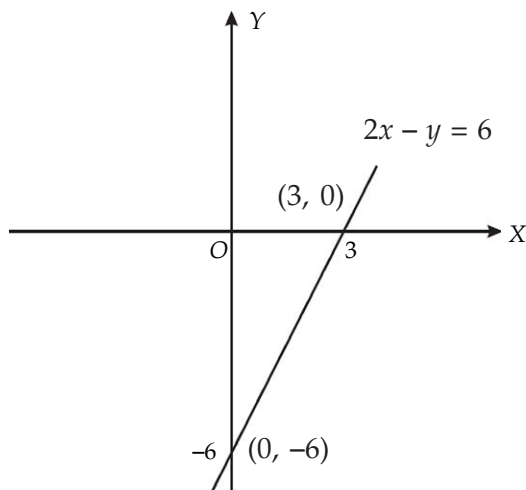
Jadi, titik potong dengan sumbu Y adalah (0, -6).

Jika dibuat dalam tabel seperti berikut ini.

Tabel 1.1

x	0	3
y	-6	0
(x, y)	(0, -6)	(3, 0)

Gambar grafiknya sebagai berikut.



Gambar 1.2

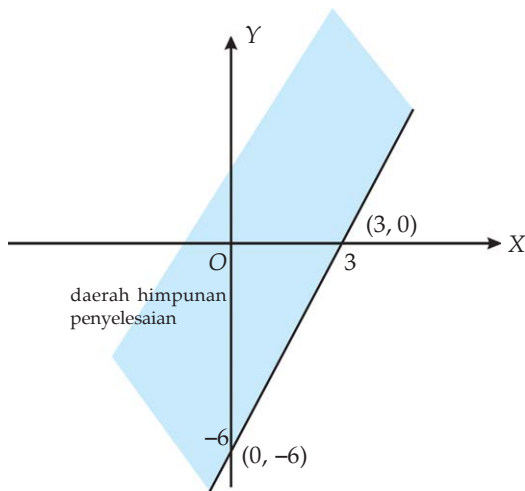
Langkah berikutnya adalah mengambil sembarang titik uji yang terletak di luar garis $2x - y = 6$, misalnya titik $O(0, 0)$. Titik uji tersebut kita substitusikan ke dalam pertidaksamaan $2x - y \leq 6$. Sehingga diperoleh:

$$2x - y \leq 6$$

$$2(0) - 0 \leq 6$$

$$0 \leq 6 \text{ (merupakan pernyataan yang benar)}$$

Karena $2(0) - 0 \leq 6$, maka bagian belahan bidang yang memuat titik $(0, 0)$ merupakan daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x - y \leq 6$. Langkah terakhir adalah menandai daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x - y \leq 6$.



Gambar 1.3

Catatan

Dalam buku ini, daerah himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan ditandai dengan menggunakan raster.

Dari contoh 1.3, diperoleh langkah-langkah untuk menentukan himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan sebagai berikut.

- Menggambar grafik $ax + by = c$ pada bidang Cartesius.
- Mengambil sembarang titik uji (x_1, y_1) yang terletak di luar garis $ax + by = c$ dan mensubstitusikan titik uji tersebut ke dalam pertidaksamaannya. Apabila diperoleh pernyataan yang benar, maka bagian belahan bidang yang memuat titik uji (x_1, y_1) merupakan daerah himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan. Sebaliknya, apabila diperoleh pernyataan yang salah, maka bagian belahan bidang yang tidak memuat titik uji (x_1, y_1) merupakan daerah himpunan penyelesaiannya.
- Menandai daerah himpunan dengan menggunakan raster atau arsiran.

Sekarang, kita akan mempelajari cara menentukan himpunan penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Perhatikan contoh 1.4 berikut!

Contoh 1.4

Tentukan daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel berikut ini:

$$3x + 2y \leq 12, x - y \leq 3, x \geq 0, \text{ dan } y \geq 0 \text{ untuk } x, y \in R!$$

Penyelesaian:

Langkah pertama adalah menggambar masing-masing grafik himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan-pertidaksamaan yang membentuk sistem pertidaksamaan linear dua variabel tersebut.

- a. Menentukan titik potong $3x + 2y = 12$ dan $x - y = 3$ dengan sumbu X dan sumbu Y.

Tabel 1.2

$3x + 2y = 12$		
x	0	4
y	6	0
(x, y)	(0, 6)	(4, 0)

(a)

$x - y = 3$		
x	0	3
y	-3	0
(x, y)	(0, -3)	(3, 0)

(b)

- b. Mengambil sembarang titik uji, misalnya (0, 0), untuk disubstitusikan ke dalam pertidaksamaannya.

$$3x + 2y \leq 12$$

$$3(0) + 2(0) \leq 12$$

$$0 \leq 12 \text{ (benar)}$$

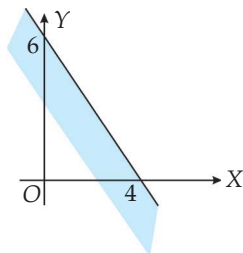
$$x - y \leq 3$$

$$0 - 0 \leq 3$$

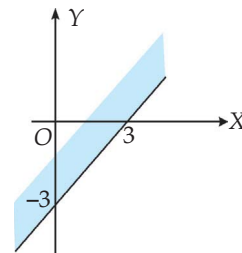
$$0 \leq 3 \text{ (benar)}$$

- c. Menggambar daerah himpunan penyelesaian keempat pertidaksamaan.

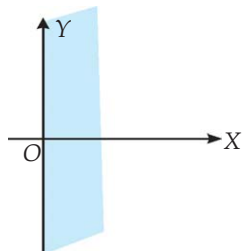
1) $3x + 2y \leq 12$



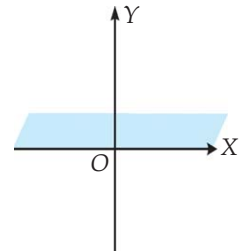
2) $x - y \leq 3$



3) $x \geq 0$

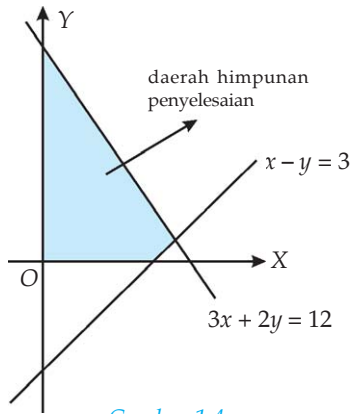


4) $y \geq 0$



Gambar 1.3

Langkah berikutnya adalah menentukan irisan atau interseksi dari keempat grafik pada gambar 1.3. Irisan atau interseksi tersebut merupakan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel $3x + 2y \leq 12$, $x - y \leq 3$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ untuk $x, y \in R$.

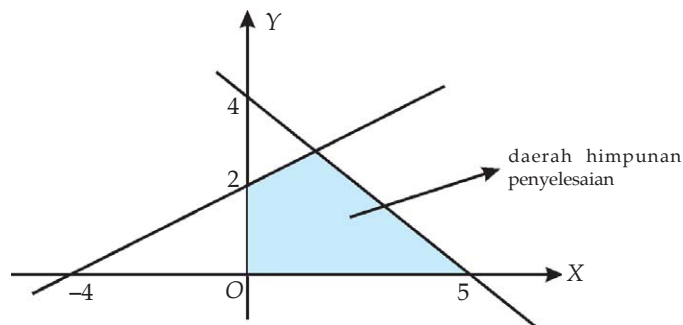


Gambar 1.4

Kita telah dapat menggambar daerah himpunan penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Sekarang, dapatkan Anda melakukan proses kebalikannya? Dapatkah Anda menentukan bentuk sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel jika gambar daerah himpunan penyelesaiannya telah diketahui? Perhatikan contoh 1.5 berikut!

Contoh 1.5

Tentukan sistem pertidaksamaan linear dua variabel yang daerah himpunan penyelesaiannya ditunjukkan pada gambar berikut!



Gambar 1.5

Penyelesaian:

1. Persamaan garis yang melalui (0, 4) dan (5, 0)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 4}{0 - 4} = \frac{x - 0}{5 - 0}$$

$$\frac{y - 4}{-4} = \frac{x}{5}$$

$$5(y - 4) = -4x$$

$$5y - 20 = -4x$$

$$4x + 5y = 20$$

Ambil titik $O(0, 0)$ sebagai titik uji, kemudian substitusikan pada persamaan garis yang telah diketahui.

$$4(0) + 5(0) \leq 20 \quad (\text{benar})$$

Jadi, diperoleh pertidaksamaan $4x + 5y \leq 20$.

2. Persamaan garis yang melalui (0, 2) dan (-4, 0)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{0 - 2} = \frac{x - 0}{-4 - 0}$$

$$\frac{y - 2}{-2} = \frac{x}{-4}$$

$$-4(y - 2) = -2x$$

$$-4y + 8 = -2x$$

$$2x - 4y = -4$$

$$x - 2y = -2$$

Ambil titik $O(0,0)$ sebagai titik uji, kemudian substitusikan pada persamaan garis yang telah diketahui.

$$0 - 2(0) \geq -2 \quad (\text{benar})$$

Sehingga diperoleh pertidaksamaan $x - 2y \geq -2$

3. Garis $x = 0$

Karena daerah himpunan penyelesaian berada di sebelah kanan garis $x = 0$, maka diperoleh pertidaksamaan $x \geq 0$.

4. Garis $y = 0$

Karena daerah himpunan penyelesaian berada di sebelah atas garis $y = 0$, maka diperoleh pertidaksamaan $y \geq 0$.

Jadi, sistem pertidaksamaannya adalah $4x + 5y \leq 20$, $x - 2y \geq -2$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ dengan $x, y \in R$.

Tugas Kelompok

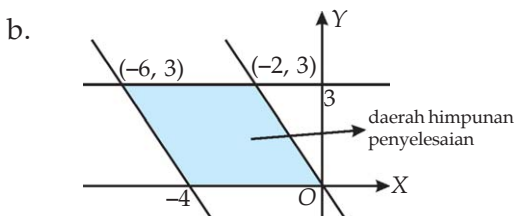
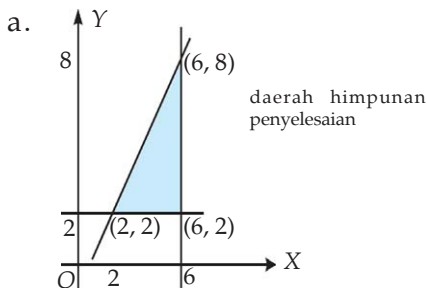
Diskusikan dengan kelompok Anda!

Suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel terdiri atas pertidaksamaan $3x + 2y \leq 6$ dan $3x + 2y \geq 12$ dengan $x, y \in R$. Apakah sistem pertidaksamaan tersebut mempunyai daerah himpunan penyelesaian? Jelaskan alasannya!

Latihan 2

Kerjakan di buku tugas Anda!

- Gambarlah daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut dengan $x, y \in R$!
 - $-3 < x < 2$
 - $4 \geq y > 1$
 - $5x + 2y \leq 10$
 - $3x + 4y \geq 12$
- Gambarlah daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut dengan $x, y \in R$!
 - $4x + 7y \leq 28$, $5x - 3y \leq 15$, $x \geq 0$, dan $0 \leq y \leq 8$
 - $3x - 4y \leq 16$, $3x + 2y \leq 46$, $x \geq 0$, dan $0 \leq y \leq 8$
- Tentukan sistem pertidaksamaan linear dua variabel yang daerah himpunan penyelesaiannya ditunjukkan oleh gambar berikut.



4. Diketahui sistem pertidaksamaan $5x + 7y \leq 35$, $2 \leq x \leq 7$, dan $y \geq 0$ dengan $x, y \in R$.
 - a. Tentukan titik-titik (x, y) pada daerah himpunan penyelesaian tersebut untuk $x, y \in N$ (N adalah himpunan bilangan asli).
 - b. Tentukan nilai $2x - y$ untuk setiap titik yang diperoleh pada soal a.
 - c. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum pada soal b serta untuk titik-titik mana nilai-nilai itu diperoleh.

3. Program Linear dan Model Matematika

Di dalam masalah yang berkaitan dengan program linear, kita akan menghadapi persoalan pengoptimuman (optimasi) suatu fungsi linear. Pengoptimuman ini dapat berupa pemaksimuman atau meminimuman. Artinya, kita akan mencari nilai maksimum atau nilai minimum dari fungsi tujuan yang berupa fungsi linear tersebut.

Untuk memecahkan masalah program linear, kita sebelumnya harus dapat menerjemahkan bahasa permasalahan ke dalam bahasa matematika. Bahasa atau rumusan matematika ini disebut model matematika. Dalam menyusun atau merumuskan model matematika, kita harus dapat menyatakan besaran-besaran masalah sebagai variabel-variabel. Selanjutnya adalah merumuskan hubungan matematika sesuai dengan ketentuan dalam masalah tersebut.

Perhatikan contoh 1.6 berikut!

Contoh 1.6

Ibu membeli 3 kg jeruk dan 5 kg apel seharga Rp72.500,00. Sedangkan Ihsan hanya membayar Rp17.500,00 untuk 1 kg jeruk dan 1 kg apel. Buatlah model matematika dari permasalahan tersebut!

Penyelesaian:

Langkah pertama adalah menyatakan besaran-besaran dalam permasalahan sebagai variabel-variabel. Misalkan untuk harga 1 kg jeruk dinyatakan dengan x rupiah, sedangkan untuk harga 1 kg apel dinyatakan dengan y rupiah.

Langkah berikutnya adalah merumuskan hubungan matematika sesuai ketentuan dalam permasalahan. Berdasarkan permasalahan pada contoh 1.6 diperoleh hubungan:

$$3x + 5y = 72.500$$

$$x + y = 17.500$$

Jadi, model matematikanya adalah $3x + 5y = 72.500$ dan $x + y = 17.500$ dengan $x, y \in C$.

Pada prinsipnya, menyusun atau merumuskan model matematika dalam suatu masalah program linear adalah menentukan fungsi tujuan, fungsi objektif, atau fungsi sasaran beserta kendala yang harus dipenuhi dalam masalah program linear tersebut. Perhatikan contoh 1.7 berikut!

Contoh 1.7

Kakak akan membuat dua jenis roti, yaitu roti *A* dan roti *B*. Roti *A* membutuhkan 1 kg tepung terigu dan 0,5 kg telur. Sedangkan roti *B* membutuhkan 1,5 kg tepung terigu dan 1 kg telur. Kakak hanya mempunyai 15 kg tepung terigu dan 40 kg telur. Jika banyaknya roti *A* yang akan dibuat adalah x dan banyaknya roti *B* yang akan dibuat adalah y , maka tentukan model matematikanya!

Penyelesaian:

Agar lebih mudah dalam membuat model matematikanya, persoalan tersebut disajikan dalam tabel terlebih dahulu.

Tabel 1.3

	Roti A (x)	Roti B (y)	Persediaan bahan
Tepung terigu	x	$1,5y$	15
Telur	$0,5x$	y	10

Banyaknya tepung terigu yang dibutuhkan untuk membuat kedua roti adalah $(x + 1,5y)$ kg. Karena persediaan tepung terigu adalah 15 kg, maka diperoleh hubungan:

$$x + 1,5y \leq 15 \text{ atau } 2x + 3y \leq 30$$

Sedangkan banyaknya telur yang dibutuhkan untuk membuat kedua roti adalah $(0,5x + y)$ kg. Karena persediaan telur adalah 10 kg, maka diperoleh hubungan:

$$0,5x + y \leq 10 \text{ atau } x + 2y \leq 20$$

x dan y adalah banyaknya roti *A* dan roti *B* sehingga x dan y tidak mungkin negatif. Oleh karena itu, x dan y harus memenuhi hubungan:

$$x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0, \text{ dengan } x, y \in \mathbb{C}.$$

Jadi, model matematikanya adalah $2x + 3y \leq 30$, $x + 2y \leq 20$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, dengan $x, y \in \mathbb{C}$.

Contoh 1.8

Seorang penjahit membuat dua jenis pakaian, yaitu pakaian anak-anak dan pakaian dewasa. Satu pakaian anak-anak memerlukan waktu 1 jam untuk tahap pemotongan, 0,5 jam untuk tahap pengobrasan, dan 1,5 jam untuk tahap penjahitan. Sedangkan satu pakaian dewasa memerlukan waktu 1,5 jam untuk tahap pemotongan, 1 jam untuk tahap pengobrasan, dan 2,5 jam untuk tahap penjahitan. Penjahit tersebut memiliki waktu untuk mengerjakan pesanan selama 20 jam untuk tahap pemotongan, 15 jam untuk tahap pengobrasan, dan 40 jam untuk tahap

penjahitan. Keuntungan bersih pakaian anak-anak dan pakaian dewasa adalah Rp15.000,00 dan Rp30.000,00. Buatlah model matematika dari masalah program linear tersebut agar diperoleh keuntungan sebesar-besarnya!

Penyelesaian:

Misalkan banyaknya pakaian anak-anak = x dan banyaknya pakaian dewasa = y . Agar lebih mudah, persoalan di atas disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut!

Tabel 1.4

	Pakaian anak-anak (x)	Pakaian dewasa (y)	Waktu
Pemotongan	$1x$	$1,5x$	20
Pengobrasan	$0,5x$	$1y$	15
Penjahitan	$1,5x$	$2,5y$	40
Keuntungan	$15.000x$	$30.000y$	

Waktu yang digunakan untuk tahap pemotongan kedua jenis pakaian adalah $(x + 1,5y)$ jam dengan waktu yang tersedia 20 jam. Sehingga diperoleh hubungan:

$$x + 1,5y \leq 20 \text{ atau } 2x + 3y \leq 40$$

Waktu yang digunakan untuk tahap pengobrasan kedua jenis pakaian adalah $(0,5x + y)$ jam dengan waktu yang tersedia 15 jam. Sehingga diperoleh hubungan:

$$0,5x + y \leq 15 \text{ atau } x + 2y \leq 30$$

Waktu yang digunakan untuk tahap penjahitan kedua jenis pakaian adalah $(1,5x + 2,5y)$ jam dengan waktu yang tersedia 40 jam. Sehingga diperoleh hubungan:

$$1,5x + 2,5y \leq 40 \text{ atau } 3x + 5y \leq 80$$

x dan y menyatakan banyaknya pakaian anak-anak dan pakaian dewasa dan harus merupakan bilangan cacah, sehingga $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ dengan $x, y \in C$.

Keuntungan yang diperoleh dari kedua jenis pakaian adalah:

$$z = 15.000x + 30.000y$$

Jadi, model matematika dari masalah di atas adalah:

- $2x + 3y \leq 40, x + 2y \leq 30, 3x + 5y \leq 80, x \geq 0, \text{ dan } y \geq 0, \text{ dengan } x \text{ dan } y \in C.$

Bagian ini adalah sistem pertidaksamaan linear dua variabel yang merupakan kendala.

□ $z = 15.000x + 30.000y$

Bagian ini adalah fungsi linear dua variabel yang merupakan fungsi tujuan, fungsi objektif, atau fungsi sasaran yang akan ditentukan nilai maksimumnya.

Kita telah mempelajari cara membuat model matematika masalah program linear yang berhubungan dengan pemaksimuman suatu fungsi linear. Sekarang, perhatikan contoh 1.9 berikut!

Contoh 1.9

Seorang praktikan membutuhkan dua jenis larutan, yaitu larutan *A* dan larutan *B* untuk eksperimennya. Larutan *A* mengandung 10 ml bahan I dan 20 ml bahan II. Sedangkan larutan *B* mengandung 15 ml bahan I dan 30 ml bahan II. Larutan *A* dan larutan *B* tersebut akan digunakan untuk membuat larutan *C* yang mengandung bahan I sedikitnya 40 ml dan bahan II sedikitnya 75 ml. Harga tiap ml larutan *A* adalah Rp5.000,00 dan tiap ml larutan *B* adalah Rp8.000,00. Buatlah model matematikanya agar biaya untuk membuat larutan *C* dapat ditekan sekecil-kecilnya!

Penyelesaian:

Misalkan banyaknya larutan *A* adalah x dan banyaknya larutan *B* adalah y . Agar lebih mudah, persoalan program linear tersebut disajikan dalam tabel seperti berikut ini.

Tabel 1.5

	Larutan <i>A</i> (x)	Larutan <i>B</i> (y)	Larutan <i>C</i>
Bahan I	$10x$	$15y$	40
Bahan II	$20x$	$30y$	75
Biaya	$5.000x$	$8.000y$	

Bahan I yang terkandung dalam larutan *C* sebanyak $(10x + 15y)$ ml, padahal larutan *C* mengandung bahan I sedikitnya 40 ml. Sehingga diperoleh hubungan:

$$10x + 15y \geq 40 \text{ atau } 2x + 3y \geq 8$$

Bahan II yang terkandung dalam larutan *C* sebanyak $(20x + 30y)$ ml, padahal larutan *C* mengandung bahan II sedikitnya 75 ml. Sehingga diperoleh hubungan:

$$20x + 30y \geq 75 \text{ atau } 4x + 6y \geq 15$$

x dan y menyatakan banyaknya larutan sehingga tidak mungkin negatif dan harus merupakan bilangan real. Sehingga diperoleh hubungan: $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ dengan $x, y \in R$.

Biaya untuk membuat larutan *C* adalah:

$$z = 5.000x + 8.000y$$

Jadi, model matematika dari masalah di atas adalah:

□ $2x + 3y \geq 8, 4x + 6y \geq 15, x \geq 0, \text{ dan } y \geq 0$ dengan $x, y \in R$.

Bagian ini adalah sistem pertidaksamaan linear dua variabel yang merupakan kendala.

□ $z = 5.000x + 8.000y$

Bagian ini adalah fungsi linear dua variabel yang merupakan fungsi tujuan, fungsi objektif, atau fungsi sasaran yang akan ditentukan nilai minimumnya.

Latihan 3

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Irfan membeli 3 kaos olahraga dan 4 raket bulu tangkis dengan harga keseluruhan Rp335.000,00. Sedangkan Indra harus membayar Rp375.000,00 untuk 5 kaos olahraga dan 3 raket bulu tangkis yang sama. Buatlah model matematika dari masalah tersebut!
2. Anisa ingin membuat dua macam boneka, yaitu boneka A dan boneka B. untuk membuat boneka A diperlukan 1 m kain dan 1 kg dakron. Sedangkan untuk membuat boneka B diperlukan 2 m kain dan 1,5 kg dakron. Anisa hanya mempunyai 7 m kain dan 12 kg dakron. Buatlah model matematika dari masalah tersebut!
3. Di dalam suatu ujian Bahasa Indonesia ada dua pilihan tipe soal. Tipe I terdiri atas 40 soal yang masing-masing dapat diselesaikan dalam waktu rata-rata 2 menit. Tipe II terdiri atas 15 soal yang masing-masing dapat diselesaikan dalam waktu rata-rata 5 menit. Setiap jawaban yang benar dari soal tipe I akan memperoleh skor 2, sedangkan setiap jawaban yang benar dari soal tipe II akan memperoleh skor tiga kali lipatnya. Jika waktu yang tersedia untuk ujian tersebut 2 jam, buatlah model matematikanya agar peserta ujian dapat memperoleh skor setinggi-tingginya!
4. Fitri diharuskan makan dua tablet vitamin setiap hari. Tablet pertama mengandung 3 unit vitamin B dan 2 unit vitamin C, sedangkan tablet kedua mengandung 2 unit vitamin B dan 3 unit vitamin C. Dalam sehari Fitri memerlukan maksimal 18 unit vitamin B dan 15 unit vitamin C. Jika harga tablet pertama Rp800,00 per biji dan tablet kedua Rp700,00 per biji, buatlah model matematika dari masalah tersebut agar pengeluaran Fitri untuk membeli tablet per hari dapat ditekan serendah-rendahnya!

B. Nilai Optimum Fungsi Objektif

Setelah menyusun model matematika suatu program linear, langkah selanjutnya adalah menentukan jawaban atau penyelesaian bagi masalah tersebut. Kita sudah mengetahui bahwa tujuan program linear adalah menentukan penyelesaian optimum. Dari segi matematika, penyelesaian ini berupa titik pada himpunan penyelesaian yang akan membuat fungsi objektif atau fungsi tujuan bernilai maksimum atau minimum. Permasalahannya adalah bagaimana Anda dapat mencari satu di antara sekian banyak titik yang akan membuat fungsi objektif tersebut bernilai optimum?

Info Matematika

Program linear merupakan salah satu bahasan dalam optimasi yang berkembang cukup pesat. Perumusan masalah program linear dan pemecahannya secara sistematis baru dimulai pada tahun 1947 ketika George B. Dantzig merancang sebuah metode yang dikenal dengan nama Metode Simpleks untuk keperluan angkatan udara AS. Apa yang dirintis oleh Dantzig ini merupakan langkah yang penting untuk mengembangkan pemrograman linear kepada penggunaan yang lebih luas.

Untuk menentukan nilai optimum suatu fungsi objektif, kita dapat menggunakan dua metode, yaitu:

1. Metode simpleks

Metode simpleks pertama kali dikembangkan oleh George Dantzig pada tahun 1947. Metode ini membutuhkan langkah-langkah perhitungan yang agak rumit dan biasanya digunakan untuk menyelesaikan masalah program linear yang melibatkan banyak variabel.

2. Metode grafik

Metode grafik biasanya digunakan untuk menyelesaikan masalah program linear yang sederhana, misalnya program linear yang hanya melibatkan dua variabel saja. Metode ini terdiri atas dua macam, yaitu metode uji titik ujung dan metode garis selidik. Selanjutnya, kita akan membahas kedua macam metode tersebut.

1. Metode Uji Titik Ujung

Anda sudah mempelajari bahwa model matematika program linear memuat fungsi objektif dan kendala-kendala yang harus dipenuhi. Selain itu, Anda juga telah belajar menggambar grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Selanjutnya, kita akan menentukan nilai optimum dari suatu fungsi objektif dengan metode uji titik ujung. Perhatikan contoh berikut!

Contoh 1.10

Sebuah perusahaan memproduksi sepeda dan skuter dengan menggunakan dua mesin. Untuk memproduksi sepeda dibutuhkan waktu 5 jam dengan menggunakan mesin pertama dan 2 jam dengan menggunakan mesin kedua. Untuk memproduksi skuter dibutuhkan waktu 3 jam dengan menggunakan mesin pertama dan 6 jam dengan menggunakan mesin kedua. Kapasitas maksimum mesin pertama 150 jam, sedangkan kapasitas maksimum mesin kedua 180 jam. Keuntungan bersih yang diperoleh dari tiap satu unit sepeda adalah Rp480.000,00 dan satu unit skuter adalah Rp560.000,00. Tentukan jumlah sepeda dan skuter yang harus diproduksi agar diperoleh keuntungan maksimum!

Penyelesaian:

- Langkah pertama adalah membuat model matematika dari masalah di atas. Misalkan banyaknya sepeda dinyatakan dengan x dan banyaknya skuter dinyatakan dengan y .

Tabel 1.6

	Sepeda (x)	Skuter (y)	Kapasitas maksimum
Mesin I	$5x$	$3y$	150
Mesin II	$2x$	$6y$	180
Keuntungan	$480.000x$	$560.000y$	

Berdasarkan tabel 1.6 diperoleh:

- Fungsi objektif yang akan dimaksimumkan:

$$z = 480.000x + 560.000y$$

- Kendala-kendala yang harus dipenuhi:

$$5x + 3y \leq 150$$

$$2x + 6y \leq 180$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

dengan $x, y \in C$.

- Langkah kedua adalah menggambar grafik himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dua variabel tersebut. Agar lebih mudah, kita perlu menentukan titik potong garis $5x + 3y = 150$ dan $2x + 6y = 180$ dengan sumbu X dan sumbu Y .

Tabel 1.7

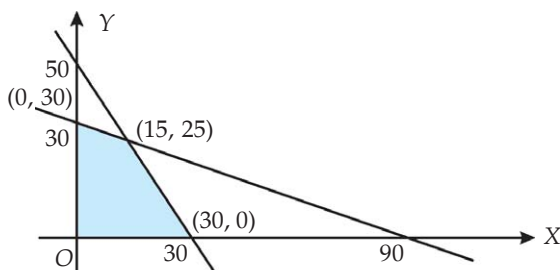
$5x + 3y = 150$		
x	0	30
y	50	0
(x, y)	(0, 50)	(30, 0)

(a)

$2x + 6y = 180$		
x	0	90
y	30	0
(x, y)	(0, 30)	(90, 0)

(b)

Diperoleh grafik sebagai berikut.



Gambar 1.6

Titik-titik ujung yang terletak pada daerah himpunan penyelesaian adalah titik-titik (0, 0), (30, 0), (15, 25), dan (0, 30).

- Langkah ketiga adalah menghitung nilai fungsi objektif $z = 480.000x + 560.000y$ untuk titik-titik ujung pada daerah himpunan penyelesaian. Perhatikan tabel 1.8 berikut!

Tabel 1.8

Titik ujung	$z = 480.000x + 560.000y$
(0, 0)	0
(30, 0)	14.400.000
(15, 25)	21.200.000
(0, 30)	16.800.000

Berdasarkan tabel 1.8 di atas diketahui bahwa fungsi objektif $z = 480.000x + 560.000y$ mencapai nilai maksimum sebesar 21.200.000 pada titik potong garis $5x + 3y = 150$ dengan $2x + 6y = 180$, yaitu (15, 25).

- Langkah terakhir adalah menafsirkan nilai maksimum fungsi objektif sebagai penyelesaian dari masalah program linear di atas. Karena nilai maksimum dicapai pada titik (15, 25), maka perusahaan akan memperoleh keuntungan maksimum jika memproduksi 15 unit sepeda dan 25 unit skuter.

Tugas Individu

Kerjakan di buku tugas Anda!

Selesaikan permasalahan berikut ini!

Seorang peternak lele setiap hari membutuhkan dua jenis makanan. Makanan jenis I mengandung 200 gram bahan A, 300 gram bahan B, dan 600 gram bahan C, sedangkan makanan jenis II mengandung 300 gram bahan A, 600 gram bahan B, dan 900 gram bahan C. Setiap hari peternak lele tersebut membutuhkan sedikitnya 1.200 gram bahan A, 1.800 gram bahan B, dan 2.700 gram bahan C. Jumlah makanan yang dibutuhkan setiap harinya sedikitnya 6 kg. Harga tiap kg makanan jenis I adalah Rp3.000,00 dan makanan jenis II adalah Rp6.000,00. Tentukan banyaknya makanan jenis I dan makanan jenis II agar biaya makanan lele setiap harinya dapat seminimal mungkin!

2. Metode Garis Selidik

Menentukan nilai optimum suatu fungsi objektif dengan metode uji titik ujung membutuhkan ketelitian dan waktu yang agak lama. Cara lain yang lebih cepat dan sederhana adalah menggunakan metode garis selidik. Apa dan bagaimana metode garis selidik tersebut? Ikuti pembahasan berikut!

Apabila diketahui fungsi objektif suatu program linear adalah $z = ax + by$, maka ambil nilai-nilai k untuk mengganti nilai z , yaitu $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$. Karena $z = ax + by$, maka:

$$k_1 = ax + by$$

$$k_2 = ax + by$$

...

$$k_n = ax + by, \text{ dengan } k \in R.$$

Garis-garis tersebut merupakan garis-garis yang sejajar pada daerah himpunan penyelesaian kendalanya. Masih ingatkah Anda syarat dua buah garis dikatakan saling sejajar?

Garis selidik $ax + by = k$ ($k \in R$) merupakan himpunan garis-garis yang sejajar. Dua buah garis dikatakan sejajar jika memiliki gradien yang sama.

Sekarang perhatikan contoh 1.11 berikut!

Contoh 1.11

Sebuah perusahaan memproduksi dua model kapal pesiar. Model I membutuhkan waktu 30 jam untuk memotong dan merakit serta 40 jam

untuk menyelesaikannya. Model 2 membutuhkan 45 jam untuk memotong dan merakit serta 30 jam untuk menyelesaikannya. Waktu yang tersedia 360 jam untuk memotong dan merakit serta 300 jam untuk menyelesaikannya. Keuntungan bersih untuk setiap unit model I sebesar Rp4.500.000,00 dan model II sebesar Rp6.000.000,00. Tentukan banyaknya kapal pesiar model I dan model II yang harus diproduksi agar diperoleh keuntungan maksimum!

Penyelesaian:

Misalkan x adalah banyaknya kapal pesiar model I dan y adalah banyaknya kapal pesiar model II. Sebelumnya, kita sajikan dulu masalah di atas dalam tabel 1.9 berikut ini.

Tabel 1.9

	Model I (x)	Model II (y)	Waktu yang tersedia
Memotong dan merakit	$30x$	$45y$	360
Menyelesaikan	$40x$	$30y$	300
Keuntungan bersih	$4.500.000x$	$6.000.000y$	

Berdasarkan tabel 1.9 diperoleh:

- a. Fungsi objektif yang akan dimaksimumkan:

$$z = 4.500.000x + 6.000.000y$$

- b. Kendala-kendala yang harus dipenuhi:

$$30x + 45y \leq 360$$

$$40x + 30y \leq 300$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

dengan $x, y \in C$.

Langkah berikutnya adalah menggambar daerah himpunan penyelesaian. Titik potong garis $30x + 45y = 360$ dan $40x + 30y = 300$ dengan sumbu X dan sumbu Y disajikan dalam tabel 1.10 berikut ini.

Tabel 1.10

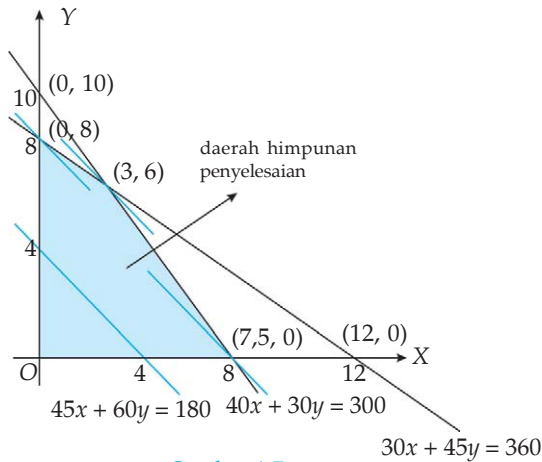
$30x + 45y = 360$		
x	0	12
y	8	0
(x, y)	(0, 8)	(12, 0)

(a)

$40x + 30y = 300$		
x	0	7,5
y	10	0
(x, y)	(0,10)	(7,5, 0)

(b)

Diperoleh grafik himpunan penyelesaian sebagai berikut.



Gambar 1.7

Catatan

- Jika garis selidik terletak paling jauh dari titik $O(0, 0)$ dan melewati titik (x, y) yang terletak pada daerah himpunan penyelesaian, maka titik (x, y) tersebut yang akan membuat fungsi objektif bernilai maksimum.
- Jika garis selidik terletak paling dekat dari titik $O(0, 0)$ dan melalui titik (x, y) yang terletak pada daerah himpunan penyelesaian, maka titik (x, y) tersebut yang akan membuat fungsi objektif bernilai minimum.

Karena fungsi objektif berbentuk $z = 4.500.000x + 6.000.000y$, maka persamaan garis selidiknya adalah $4.500.000x + 6.000.000y = k$ ($k \in R$). Misalnya, kita ambil nilai $k = 18.000.000$, sehingga garis tersebut mempunyai persamaan $4.500.000x + 6.000.000y = 18.000.000$ atau disederhanakan menjadi $45x + 60y = 180$.

Garis yang sejajar dengan $45x + 60y = 180$ dan terletak paling jauh dari titik $O(0, 0)$ adalah garis yang melalui titik $(3, 6)$. Dengan demikian, titik $(3, 6)$ merupakan titik optimum, yaitu nilai maksimum $z = 4.500.000x + 6.000.000y$.

$$\begin{aligned}
 (3, 6) \rightarrow z &= 4.500.000x + 6.000.000y \\
 &= 4.500.000(3) + 6.000.000(6) \\
 &= 13.500.000 + 36.000.000 \\
 &= 49.500.000
 \end{aligned}$$

Jadi, perusahaan akan memperoleh keuntungan maksimum, yaitu sebesar Rp49.500.000,00 jika memproduksi 3 unit kapal pesiar model A dan 6 unit kapal pesiar model B.

Latihan 4

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan nilai maksimum fungsi objektif $z = 10x + 25y$ dengan kendala-kendala $x \leq 12$, $2 \leq y \leq 7$, $2x + y \leq 8$!
2. Tentukan nilai minimum fungsi objektif $z = 15x + 8y$ dengan kendala-kendala $8x + 7y \leq 48$, $x - 10y \leq 6$, $3x - y \leq -11$!

3. Seorang pedagang membeli pakaian anak-anak seharga Rp30.000,00 dan pakaian dewasa seharga Rp50.000,00. Tas pedagang hanya dapat dimuati tidak lebih dari 60 pakaian. Modal pedagang Rp3.000.000,00. Jika keuntungan pakaian anak-anak Rp6.000,00 dan pakaian dewasa Rp10.000,00, maka tentukan keuntungan maksimum yang dapat diperoleh pedagang tersebut!
4. Seorang tukang kebun membutuhkan dua jenis pupuk. Dalam setiap kantong, pupuk jenis I mengandung 300 gram zat kimia A dan 600 gram zat kimia B. sedangkan pupuk jenis II mengandung 400 gram zat kimia A dan 300 gram zat kimia B. Tukang kebun tersebut membutuhkan sedikitnya 12 kg zat kimia A dan 15 kg zat kimia B. Jika harga satu kantong pupuk jenis I Rp10.000,00 dan pupuk jenis II Rp12.000,00, tentukan banyaknya pupuk jenis I dan pupuk jenis II agar biaya dapat ditekan seminimum mungkin!
5. Luas lahan parkir 176 m^2 , sedangkan luas rata-rata tiap mobil dan bus masing-masing 4 m^2 dan 20 m^2 . Lahan parkir tersebut hanya mampu menampung 20 mobil dan bus. Jika biaya parkir untuk mobil Rp1.000,00 per jam dan untuk bus dua kali lipatnya, berapakah besar pendapatan maksimum yang dapat diperoleh dari lahan parkir tersebut?



Rangkuman

1. Program linear adalah metode untuk menyelesaikan masalah optimasi, yaitu masalah yang berhubungan dengan penentuan maksimum atau minimum suatu fungsi linear dengan kendala-kendala berupa sistem pertidaksamaan linear.
2. Langkah-langkah untuk menentukan daerah himpunan penyelesaian suatu masalah program linear sebagai berikut.
 - a. Membuat model matematikanya.
 - b. Menggambar grafik, yaitu garis $ax + by = c$ pada bidang Cartesius.
 - c. Mengambil sembarang titik uji yang terletak di luar garis $ax + by = c$ dan mensubstitusikan ke dalam pertidaksamaannya.
 - d. Apabila titik uji menyebabkan pertidaksamaan bernilai benar, maka bagian belahan bidang yang memuat titik uji adalah daerah himpunan penyelesaian.

- e. Menentukan interseksi atau irisan dari berbagai grafik penyelesaian.
3. Untuk menentukan nilai optimum fungsi objektif $z = ax + by$ dapat menggunakan metode sebagai berikut.
 - a. Uji titik ujung
Titik–titik di setiap ujung daerah himpunan penyelesaian disubstitusikan ke fungsi z untuk menentukan titik mana yang akan mengoptimalkan fungsi z .
 - b. Garis selidik
Membuat garis selidik $ax + by = k$ ($k \in R$), kemudian membuat garis–garis yang sejajar dengan garis selidik. Titik pada daerah himpunan penyelesaian yang dilalui garis selidik yang terletak paling jauh atau paling dekat dengan titik $O(0, 0)$ akan mengoptimalkan fungsi z .



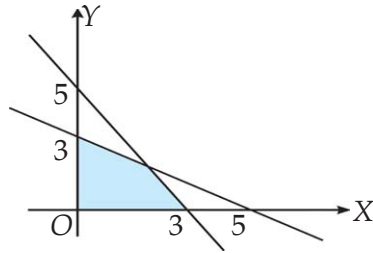
Uji Kompetensi

Kerjakan soal–soal di bawah ini dengan benar!

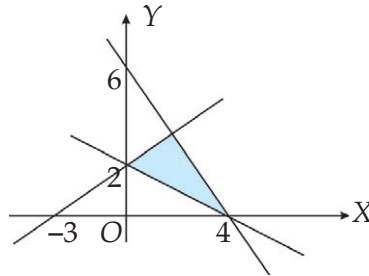
1. Manakah di antara pertidaksamaan di bawah ini yang merupakan pertidaksamaan linear dua variabel?
 - a. $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 4$ dan $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq 2$
 - b. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 6$ dan $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} \leq 12$
 - c. $x(x + 2) + y \geq 2$
 - d. $10 + 2x < 5y$
2. Gambarkan daerah himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut dengan $x, y \in R$!
 - a. $\frac{1}{2} \leq x < \frac{6}{2}$ dan $y \geq 2$
 - b. $x < 8$ dan $0 \leq y \leq 6$

3. Tentukan sistem pertidaksamaan linear yang daerah himpunan penyelesaiannya ditunjukkan oleh gambar berikut:

a.



b.



4. Tunjukkan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut:
- $5x + 2y \leq 10$, $2x + 3y \leq 6$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ dengan $x, y \in R$;
 - $-x + y \leq 2$, $2x + 3y \leq 12$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ dengan $x, y \in R$!
5. Pada ujian Bahasa Inggris terdapat dua tipe soal. Dibutuhkan waktu 3 menit untuk menjawab setiap soal pada soal tipe I dan dibutuhkan waktu 4 menit untuk menjawab setiap soal pada soal tipe II. Waktu yang tersedia hanya 2 jam. Buatlah model matematika permasalahan tersebut!
6. Sebuah kapal memiliki kapasitas maksimum 500 orang penumpang. Setiap penumpang kelas eksekutif boleh membawa barang maksimum 60 kg dan kelas ekonomi 30 kg. Kapal tersebut hanya dapat mengangkut 1.200 kg barang. Buatlah model matematikanya!
7. Tentukan nilai maksimum dari fungsi $z = 40x + 10y$ dengan kendala $x + y \leq 10$, $2x + y \leq 12$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ dengan $x, y \in R$!
8. Sebuah kolam besar terdiri dari ikan lele dan ikan mujair. Berat rata-rata per ekor ikan lele 500 gram dan ikan mujair 400 gram. Berat seluruh ikan paling sedikit 200 kg. Kolam tersebut hanya dapat menampung 160 ekor ikan. Gambarkan daerah penyelesaiannya!

9. Diketahui sistem pertidaksamaan $x + 2y \leq 10$, $2x + y \leq 8$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$.
 - a. Tentukan nilai $x + 2y$ untuk setiap titik pada daerah himpunan penyelesaian dengan $x, y \in N$ (himpunan bilangan asli)!
 - b. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum pada soal a serta untuk titik-titik mana nilai-nilai itu diperoleh!
10. Tentukan nilai minimum dari fungsi $z = 25x + 20y$ dengan kendala $x + 2y \geq 4$, $7x + 4y \leq 28$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$!
11. Sebuah perusahaan percetakan memproduksi dua jenis buku teks. Buku teks A membutuhkan 5 jam untuk mencetak dan 8 jam untuk menjilid. Buku teks B membutuhkan 6 jam untuk mencetak dan 4 jam untuk menjilid. Waktu yang tersedia untuk mencetak 490 jam dan untuk menjilid 560 jam. Laba bersih dari buku teks A sebesar Rp18.000,00 dan dari buku teks B sebesar Rp20.000,00. Tentukan banyaknya buku teks A dan B yang harus diproduksi agar perusahaan memperoleh laba maksimum!
12. Nenek ingin membuat dua jenis makanan. Makanan I membutuhkan 5 kg tepung terigu dan 2 kg gula pasir. Makanan II membutuhkan 3 kg tepung terigu dan 5 kg gula pasir. Nenek membeli sedikitnya 30 kg tepung terigu dan 20 kg gula pasir. Jika harga tepung terigu Rp6.000,00 per kg dan Rp8.000,00 untuk gula pasir per kg, berapa kg banyaknya tepung terigu dan gula pasir yang harus dibeli nenek agar biaya yang dikeluarkan dapat semurah-murahnya?
13. Seorang pengrajin membuat dua macam cinderamata dari kayu lapis. Setiap unit cinderamata A membutuhkan 10 menit untuk memotong dan 20 menit untuk merakit. Setiap unit cinderamata B membutuhkan 25 menit untuk memotong dan 10 menit untuk merakit. Waktu yang tersedia 5 jam untuk memotong dan 5 jam untuk merakit. Keuntungan tiap unit dari cinderamata A sebesar Rp5.000,00 dan Rp7.500,00 dari cinderamata B. Hitunglah keuntungan maksimum yang dapat diperoleh pengrajin tersebut!
14. Di sebuah rumah makan, seseorang harus membayar tidak lebih dari Rp36.000,00 untuk 3 porsi nasi dan 6 gelas es teh yang dipesannya. Pelanggan di sebelahnya membayar tidak lebih dari Rp94.000,00 untuk 9 porsi nasi dan 4 gelas es teh. Jika ada yang memesan 2 porsi nasi dan 4 gelas es teh, berapa harga maksimum yang harus dia bayar?

15. Handy membutuhkan dua macam suplemen setiap hari. Suplemen I mengandung 1 gram produk A dan 2 gram produk B. Suplemen II mengandung 2 gram produk A dan 1 gram produk B. Handy harus mengonsumsi sedikitnya 10 gram suplemen A dan 11 gram suplemen B setiap hari untuk menjaga stamina tubuhnya. Jika harga suplemen I Rp500,00 per gram dan suplemen II Rp1.000,00 per gram, tentukan biaya minimum yang dikeluarkan Handy setiap hari!

Pengayaan

Kerjakan di buku tugas Anda!

Sebuah perusahaan mebel memproduksi tiga jenis meja, yaitu meja makan, meja rias, dan meja belajar. Satu unit meja makan membutuhkan waktu persiapan 1 jam, pemasangan 1 jam, dan pengecatan 1 jam. Satu unit meja rias membutuhkan waktu persiapan 2 jam, pemasangan 1 jam, dan pengecatan 1 jam. Satu unit meja belajar membutuhkan waktu persiapan 1 jam, pemasangan 1 jam, dan pengecatan 2 jam. Waktu yang tersedia untuk persiapan 100 jam, pemasangan 160 jam, dan pengecatan 120 jam. Keuntungan bersih dari satu unit meja makan sebesar Rp16.000,00, dari satu unit meja rias sebesar Rp30.000,00, dan dari satu unit meja belajar sebesar Rp20.000,00.

- Berapa banyak ketiga jenis meja tersebut harus dibuat agar perusahaan memperoleh laba maksimum?
- Tentukan besar laba maksimum yang dapat dicapai perusahaan tersebut!
- Berapa jumlah optimal ketiga jenis meja tersebut bila perusahaan hanya mampu memperoleh laba minimum?

Bab 2

Matriks

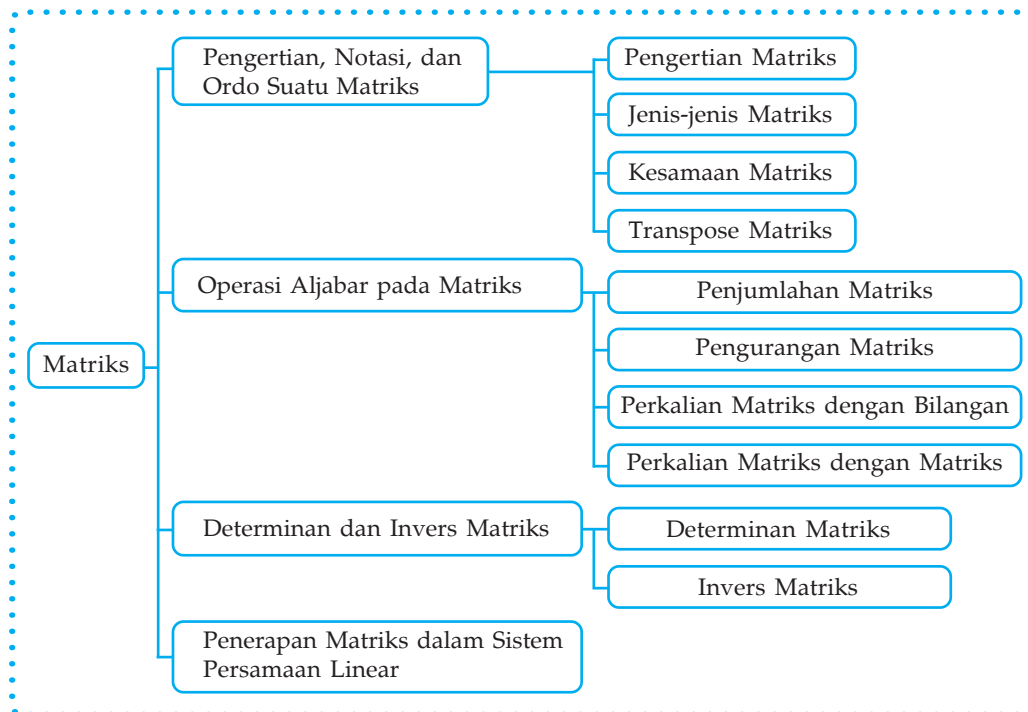
Standar Kompetensi

Menggunakan matriks dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar

- Menggunakan sifat-sifat dan operasi matriks untuk menunjukkan bahwa suatu matriks persegi merupakan invers dari matriks persegi lain
- Menentukan determinan dan invers matriks 2×2
- Menggunakan determinan dan invers dalam penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel

Peta Konsep





Sumber: bataknews.files.wordpress.com
Gambar 2.1

Anda tentu pernah pergi ke pasar buah, bukan? Sekarang, coba simak cerita berikut ini. Pada hari Minggu pagi, Fita dan Ratna pergi ke pasar buah bersama-sama. Fita membeli 3 kg jeruk dan 4 kg manggis dengan harga keseluruhan Rp38.000,00. Ratna membeli 2 kg jeruk dan 3 kg manggis. Untuk itu, ia harus membayar Rp27.000,00. Dapatkah Anda menentukan harga masing-masing buah tiap kgnya? Penyelesaian permasalahan tersebut dapat dicari dengan menggunakan matriks.

Pernahkah Anda mendengar istilah matriks? Aljabar matriks menetapkan notasi secara jelas dan singkat untuk merumuskan dan memecahkan berbagai masalah, bahkan yang rumit sekalipun. Selain berperan penting dalam penyelesaian sistem persamaan linear, seperti kasus di atas, matriks juga dapat digunakan untuk menyajikan informasi secara efektif dan menarik. Jadi, apa yang disebut matriks? Bagaimana matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan sistem persamaan linear? Bila Anda belum tahu jawabannya, silakan mengikuti pembahasan tentang matriks berikut.

A. Pengertian, Notasi, dan Ordo Suatu Matriks

1. Pengertian Matriks

a. Pengertian Matriks

Dalam kehidupan sehari-hari kita, sering menjumpai informasi yang disajikan dalam bentuk tabel atau daftar yang berisi angka-angka dan disusun menurut baris dan kolom. Sebagai contohnya adalah data nilai ujian 2 mata pelajaran dari 2 siswa kelas XII Bahasa yang disajikan dalam tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1

	Nilai Ujian	
	Bahasa Indonesia	Bahasa Inggris
Andi	8	7
Alfin	9	8

Kalau informasi tersebut hanya kita tuliskan bilangannya saja, maka akan diperoleh kelompok bilangan sebagai berikut:

$$\begin{array}{cc} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{array}$$

Kelompok bilangan tersebut disusun dalam bentuk persegi yang terdiri atas baris dan kolom. Agar terbatas, maka bagian tepi dari kelompok bilangan itu diberi tanda kurung, dapat berupa kurung biasa atau kurung siku, sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{baris ke-1} \\ \leftarrow \text{baris ke-2} \end{array}$$

kolom ke-1 kolom ke-2

Bentuk di atas dinamakan matriks.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan:

Matriks adalah susunan bilangan yang berbentuk jajaran persegi atau persegi panjang yang terdiri atas baris dan kolom.

Pada matriks di atas, 8 adalah elemen/unsur matriks pada baris pertama dan kolom pertama, ditulis $a_{11} = 8$, elemen-elemen yang lain ditulis $a_{12} = 7$, $a_{21} = 9$, dan $a_{22} = 8$. Sehingga diperoleh bentuk umum matriks yang mempunyai 2 baris dan 2 kolom, yaitu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

b. Notasi Matriks

Suatu matriks biasanya dinyatakan dengan huruf besar (kapital), seperti A , B , C , dan sebagainya.

Contoh 2.1

(i) Dengan menandai kurung biasa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

(ii) Dengan menandai kurung siku

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

c. Pengertian Baris, Kolom, dan Elemen Matriks

Kita telah mengetahui bahwa sebuah matriks terdiri dari sekelompok bilangan yang disusun dalam bentuk baris-baris dan kolom-kolom. Bilangan-bilangan yang terdapat dalam matriks dinamakan unsur atau elemen.

Contoh 2.2

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Susunan mendatar dari bilangan-bilangan pada matriks dinamakan baris matriks.

2 5 7 → baris pertama

9 0 1 → baris kedua

Susunan bilangan-bilangan yang tegak pada matriks dinamakan kolom matriks.

2	5	7
9	0	1
↑	↑	↑

kolom pertama kolom kedua kolom ketiga

Sehingga:

2 merupakan elemen matriks baris ke-1 kolom ke-1

5 merupakan elemen matriks baris ke-1 kolom ke-2

7 merupakan elemen matriks baris ke-1 kolom ke-3

9 merupakan elemen matriks baris ke-2 kolom ke-1

0 merupakan elemen matriks baris ke-2 kolom ke-2

1 merupakan elemen matriks baris ke-2 kolom ke-3

d. Pengertian Ordo Matriks

Suatu matriks A , yang terdiri dari m baris dan n kolom, dikatakan berordo $m \times n$ dan ditulis dengan lambang $A_{m \times n}$. Sedangkan banyaknya elemen (unsur) matriks A sama dengan $m \times n$ buah. Dengan demikian, matriks A yang berordo $m \times n$ dapat disajikan sebagai berikut:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

← Baris ke-1
← Baris ke-2

← Baris ke- m

↑ ↑ ↑
Kolom ke-1 Kolom ke-2 Kolom ke- n

Contoh 2.3

$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow$ merupakan matriks berordo 2×2 , banyak baris 2 dan banyak kolom juga 2.

$B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$ matriks berordo 2×3 , banyak baris 2 dan banyak kolom 3.

Contoh 2.4

Diketahui matriks: $C = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 & -8 \\ 1 & 9 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Tentukan:

- elemen-elemen pada baris ke-1
- elemen-elemen pada kolom ke-4
- elemen pada baris ke-2 kolom ke-3
- ordo matriks C

Penyelesaian:

- elemen-elemen pada baris ke-1 adalah 7, -5, 3, dan 8
- elemen-elemen pada kolom ke-4 adalah -8 dan 2
- elemen pada baris ke-2 dan kolom ke-3 adalah $a_{23} = 0$
- C berordo 2×4

2. Jenis-Jenis Matriks

Ditinjau dari banyaknya baris dan banyaknya kolom serta jenis elemen-elemennya, maka matriks dibedakan menjadi beberapa macam, yaitu:

a. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri dari satu baris atau matriks yang berordo $1 \times n$ dengan $n > 1$

Contoh 2.5

$$A_{1 \times 3} = (2 \quad 7)$$
$$B_{1 \times 4} = (9 \quad 0 \quad -1 \quad 5)$$

b. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang hanya terdiri dari satu kolom atau matriks yang berordo $m \times 1$ dengan $m > 1$

Contoh 2.6

$$A_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad B_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

c. Matriks Persegi atau Matriks Kuadrat

Matriks persegi atau matriks kuadrat adalah matriks yang banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Matriks $A_{m \times n}$ disebut matriks persegi jika $m = n$, sehingga sering ditulis $A_{m \times n} = A_n$.

Pada matriks persegi, elemen-elemen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ disebut elemen-elemen diagonal utama. a_{m1}, \dots, a_{1n} disebut elemen-elemen diagonal kedua. Hasil penjumlahan dari elemen-elemen pada diagonal utama matriks persegi disebut trace A .

$$\text{Trace } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

Contoh 2.7

$$A_{3 \times 3} = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 5 & -4 & 6 \\ 3 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

Elemen diagonal utamanya adalah 1, -4, dan -1.

Elemen diagonal kedua adalah 3, -4, dan 2.

$$\begin{aligned} \text{Trace } A &= 1 + (-4) + (-1) \\ &= -4 \end{aligned}$$

d. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang semua elemennya bernilai nol, kecuali elemen diagonal utama.

Contoh 2.8

$$A_2 = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya adalah nol.

Contoh 2.9

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 9 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

f. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya adalah nol.

Contoh 2.10

$$C_2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad D_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

g. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks diagonal yang semua nilai elemen pada diagonal utamanya sama dengan positif satu, sedangkan elemen lainnya nol. Matriks identitas disebut juga matriks satuan yang dilambangkan dengan "I".

Contoh 2.11

$$I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

h. Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang seluruh elemennya bernilai nol. Matriks nol dinyatakan dengan lambang "O".

Contoh 2.12

$$O_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i. Lawan Suatu Matriks

Lawan suatu matriks adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan lawan dari elemen-elemen matriks tersebut. Lawan matriks A dinotasikan dengan $-A$.

Contoh 2.13

Lawan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ adalah $-A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$

Latihan 1

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Diketahui matriks $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -7 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Tentukan:

- ordo matriks B ;
 - elemen-elemen pada kolom ke-3;
 - a_{13} , a_{22} , a_{34} !
2. Tentukan banyak elemen dari matriks-matriks berikut:
- $A_{2 \times 4}$
 - $B_{1 \times 5}$
 - $C_{5 \times 3}$
3. Pada bulan Januari, Luthfi membeli 4 buku tulis dan 5 pensil, sedangkan Toni hanya membeli 2 buku tulis dan 1 pensil. Pada bulan berikutnya, Luthfi membeli lagi 3 buku tulis dan 2 pensil, sedangkan Toni membeli 6 buku tulis dan 4 pensil. Nyatakan pernyataan tersebut dalam bentuk matriks!
4. Tentukan matriks-matriks koefisien untuk tiap sistem persamaan linear berikut:
- $2x + 5y = 8$
 $4x - y = -6$

$$\text{b. } 5x - 3y = 11$$

$$3x - 2y = 6$$

$$\text{c. } 3x - y + z = 7$$

$$2x - 5y - 3z = 9$$

$$x + 4y - z = -19$$

5. Tentukan lawan matriks berikut:

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } \begin{pmatrix} -1 & 7 & 6 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 8 \\ -5 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{d. } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Kesamaan Matriks

Dua buah matriks A dan B dikatakan sama dan ditulis $A = B$ apabila keduanya berordo sama dan semua unsur-unsur yang terkandung di dalamnya bernilai sama.

Contoh 2.14

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{2} & 3 \\ \sqrt{1} & -(-1) \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \log 10 & \sqrt{1} \\ 2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi, $A = B = C$.

Contoh 2.15

$$\text{Diketahui } A = \begin{pmatrix} 2 & 2x+y \\ x+2y & 4 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tentukan nilai x dan y apabila $A = B$!

Jawab:

$$\begin{array}{rcl}
 A = B, \text{ maka} & \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{array} & \begin{array}{l} \times 1 \\ \times 2 \end{array} \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 2x + 4y = 10 \end{array} \\
 & & \hline
 & & -3y = -6 \\
 & & y = 2 \\
 & 2x + y = 4 & \\
 & 2x + 2 = 4 & \\
 & 2x = 2 & \\
 & x = 1 &
 \end{array}$$

Jadi, nilai $x = 1$ dan $y = 2$.

4. Transpose Matriks

Transpose matriks A adalah suatu matriks yang diperoleh dengan cara mengubah setiap elemen baris matriks A menjadi elemen kolom matriks transposenya, atau sebaliknya. Transpose matriks A dilambangkan dengan A^t atau A' . Penggunaan transpose sebuah matriks mempermudah berbagai analisis matriks.

Contoh 2.16

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ maka } A' = A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \text{ maka } B' = B^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Catatan

Transpose matriks diagonal adalah matriks diagonal itu sendiri.

Latihan 2

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Di antara matriks–matriks berikut ini, manakah yang sama?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & \frac{9}{2} \\ \sqrt{36} & -\sqrt{4} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{9} & -\sqrt{4} \\ \sqrt{16} & \sqrt{25} \end{pmatrix} \quad E = (9 \ -1 \ 5 \ 7 \ 0) \quad F = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Tentukan transpose dari matriks–matriks berikut ini!

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{b. } B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -1 \\ -7 & 4 & 3 \\ 10 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Tentukan nilai x dan y dari persamaan berikut:

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 2x \\ -3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{pmatrix} -7 & -\frac{10}{x} \\ 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } \begin{pmatrix} -2x & 5 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = (4 \quad 5 \quad -2)$$

$$\text{d. } \begin{pmatrix} -5 & 2x^2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 12 & 2y \end{pmatrix}$$

4. Tentukan nilai x dan y jika $A^t = B$!

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} -2x & 2y \\ 8 & -\sqrt{9} \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ \sqrt{4} & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{x} \\ \frac{1}{2}y^2 & 4 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} \sqrt{9} & 2 \\ 5 & \sqrt{16} \end{pmatrix}$$

5. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3a & 2a-b \\ 2b+c & \sqrt{c}+d \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Tentukan A^t !

b. Tentukan nilai $2a + b$ dan $3c + bd$ jika $A^t = B$!

B. Operasi Aljabar Matriks

Pada pembahasan di depan, kita telah mempelajari pengertian matriks, notasi, ordo matriks, jenis-jenis matriks, kesamaan matriks, dan transpose matriks. Selanjutnya, kita akan membahas operasi (pengerjaan) antarmatriks, di antaranya adalah operasi penjumlahan dan pengurangan, perkalian matriks dengan bilangan real (skalar), dan perkalian matriks dengan matriks.

1. Penjumlahan Matriks

Untuk memahami penjumlahan matriks, perhatikan tabel 2.2 berikut.

Tabel 2.2

	Bulan 1		Bulan 2		Jumlah	
	Ayam	Bebek	Ayam	Bebek	Ayam	Bebek
Pak Hasan	20	15	40	20	60	35
Pak Ahmad	50	20	75	30	125	50

Tabel 2.2 menunjukkan data jumlah telur yang dihasilkan oleh ayam dan bebek milik Pak Hasan dan Pak Ahmad selama 2 bulan berturut-turut. Jika data di atas disajikan dalam bentuk matriks, maka diperoleh:

$$A + B = C$$

$$\begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 50 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 75 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 35 \\ 125 & 50 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa matriks A dan B adalah matriks yang berordo sama. Elemen-elemen matriks dari A dan B yang dijumlahkan adalah yang seletak. Sehingga diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

Jika A dan B adalah dua buah matriks yang berordo sama, maka hasil penjumlahan matriks A dengan matriks B adalah sebuah matriks baru yang diperoleh dengan cara menjumlahkan elemen-elemen matriks A dengan elemen-elemen matriks B yang seletak.

$$\text{Jadi, jika diketahui } A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ dan } B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix},$$

$$\text{maka: } (A + B)_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Contoh 2.17

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Tentukan: a) $A + B$ c) $(A + B) + C$
 b) $B + A$ d) $A + (B + C)$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a) } A + B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+4 & -1+(-2) \\ 5+0 & 3+(-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B + A &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (A + B) + C &= \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } A + (B + C) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dari contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa sifat-sifat penjumlahan matriks adalah:

1. Sifat komutatif: $A + B = B + A$
2. Sifat asosiatif: $(A + B) + C = A + (B + C)$
 A, B, C adalah matriks berordo sama.

2. Pengurangan Matriks

Pengurangan matriks dapat dinyatakan dalam penjumlahan matriks, berdasarkan pada pemahaman tentang lawan suatu matriks. Jika A dan B adalah dua matriks yang berordo sama, maka pengurangan matriks A dengan B dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A - B = A + (-B)$$

Jadi, jika diketahui:

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ dan } B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix},$$

$$\text{maka: } A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \end{pmatrix}$$

Contoh 2.18

$$\text{Jika } A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -5 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \text{ tentukan } A - B!$$

Jawab:

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & -5 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 - (-1) & 8 - 2 & -5 - 3 \\ 4 - 0 & -2 - 5 & 7 - (-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 6 & -8 \\ 4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Latihan 3

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tentukan:

- | | |
|------------|----------------|
| a. $A + B$ | d. $B - C$ |
| b. $A - B$ | e. $A + B + C$ |
| c. $B + C$ | f. $A - B - C$ |

2. Diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -3 & 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Tentukan:

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a. $A + B^t + C^t$ | c. $B - A^t + C$ |
| b. $B - C + A^t$ | d. $A - B^t + C^t$ |

3. Tentukan nilai x dan y dari:

a. $\begin{pmatrix} 3x & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3x & 4 \\ 4 & 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3y & 5 \\ 5 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -9 & -18 \end{pmatrix} = I$

4. Tentukan matriks A jika:

a. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} + A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

c. $A + \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 8 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

d. $A - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

5. Tentukan nilai x , y , dan z dari persamaan berikut ini!

a.
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ z & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 8 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & y \\ x & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Perkalian Matriks dengan Bilangan

Jika k adalah bilangan real dan A adalah sebuah matriks, maka kA adalah sebuah matriks baru yang diperoleh dari hasil perkalian k dengan elemen-elemen matriks A .

Misalnya:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ maka } kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Contoh 2.19

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -7 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ maka } 2A = \begin{pmatrix} 2(3) & 2(9) \\ 2(-7) & 2(2) \\ 2(1) & 2(5) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ -14 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Dalam aljabar matriks, bilangan real k sering disebut skalar. Sehingga operasi perkalian bilangan real k dengan matriks A disebut perkalian skalar. Perkalian matriks dengan skalar k berarti melakukan penjumlahan matriks sejenis sebanyak k kali.

Sifat perkalian matriks dengan skalar:

Jika matriks A dan B berordo sama dan $k, l \in R$ (bilangan real), maka:

- a. $(k + l)A = kA + lA$
- b. $k(A + B) = kA + kB$
- c. $k(lA) = (kl)A$
- d. $1 \times A = A \times 1 = A$
- e. $(-1)A = A(-1) = -A$

Tugas Individu

Kerjakan dengan kelompok Anda!

Buktikan bahwa jika A dan B matriks berordo sama dan $k, l \in R$, maka berlaku:

- a. $(k + l)A = kA + lA$
- b. $k(A + B) = kA + kB$
- c. $k(lA) = (kl)A$
- d. $1 \times A = A \times 1 = A$
- e. $(-1)A = A(-1) = -A$

Contoh 2.20

Diketahui matriks–matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks C berordo 2×2 yang memenuhi persamaan $3C + \frac{1}{3}B = 2A$!

Jawab:

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Dari persamaan $3C + \frac{1}{3}B = 2A$ diperoleh $3C = 2A - \frac{1}{3}B$

$$\begin{aligned} 3C &= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } C = \frac{1}{3}(3C)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Latihan 4

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$, tentukan hasil dari:

a. $2A$

d. $-3A^t$

b. $-4A$

e. $\frac{1}{2}A$

c. $\frac{1}{2}A^t$

f. $2(A + A^t)$

2. Tentukan nilai a , b , c , dan d dari persamaan berikut ini:

a. $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

b. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{c. } \begin{pmatrix} -3 & \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{4} & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{d. } 4 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 24 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ Diketahui matriks } A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -8 \\ 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tentukanlah:

$$\text{a. } 2A + \frac{1}{2}B$$

$$\text{b. } \frac{1}{2}(4A + B)$$

c. Bagaimana hasil pada soal a dan b?

4. Nyatakan hasilnya dalam matriks tunggal!

$$\text{a. } 3 \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -3 & -15 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } 2 \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -6 & 5 \\ 7 & 9 & -2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Jika X adalah matriks 2×3 , tentukan X dari persamaan berikut ini:

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 2 & -8 & 10 \\ -12 & 6 & 14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}X$$

$$\text{b. } 3X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -12 & 6 & 18 \\ -18 & 24 & 30 \end{pmatrix}$$

4. Perkalian Matriks dengan Matriks

Perhatikan tabel 3.3 berikut! Tabel 3.3 (a) berisi data mengenai banyaknya baju dan celana yang dibeli Indra dan Irfan. Sedangkan tabel 3.3 (b) berisi data mengenai harga baju dan celana per potongnya.

Tabel 3.3

	Baju	Celana
Indra	2	2
Irfan	3	1

	Harga per potong
Baju	Rp50.000,00
Celana	Rp40.000,00

(a)

(b)

Berapakah jumlah uang yang harus dibayarkan oleh Indra dan Irfan?

Penyelesaian:

- Uang yang harus dibayarkan Indra:
 $2 \times \text{Rp}50.000,00 + 2 \times \text{Rp}40.000,00 = \text{Rp}180.000,00$
- Uang yang harus dibayarkan Irfan:
 $3 \times \text{Rp}50.000,00 + 1 \times \text{Rp}40.000,00 = \text{Rp}190.000,00$

Selain menggunakan cara di atas, kita juga dapat menyelesaikan permasalahan tersebut dengan menggunakan matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50.000 \\ 40.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 50.000 & 2 \times 40.000 \\ 3 \times 50.000 & 1 \times 40.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180.000 \\ 190.000 \end{pmatrix}$$

Operasi di atas dinamakan perkalian matriks, yaitu dengan mengalikan tiap elemen pada baris matriks pertama dengan elemen pada kolom matriks kedua, kemudian hasilnya dijumlahkan. Perhatikan bahwa banyak baris matriks pertama sama dengan banyak kolom matriks kedua. Jadi, diperoleh:

Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila jumlah kolom matriks yang dikalikan sama dengan jumlah baris dari matriks pengalinya. Hasil kali dua buah matriks $A_{m \times n}$ dengan $B_{n \times p}$ adalah sebuah matriks baru $C_{m \times p}$.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, maka:

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

Contoh 2.21

Tentukan hasil perkalian matriks berikut ini:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Jawab:

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = C_{2 \times 2}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(3) + 4(2) + 2(5) & 3(1) + 4(4) + (2)(-2) \\ -(3) + 0(2) + 5(5) & -(1) + 0(4) + 5(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 15 \\ 22 & -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Catatan

Jika A suatu matriks persegi atau matriks kuadrat, maka:

$$A \cdot A = A^2$$

$$A \cdot A = A \cdot A^2 = A^3$$

$$A = A \cdot A^3 = A^4$$

...

$$A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A = A \cdot A^{n-1} = A^n$$

Contoh 2.22

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukanlah:

1) a) A^2

b) A^3

2) $A^3 + 2A^2 - 3A$

Jawab:

1) a) $A^2 = A \cdot A$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 8 & 27 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 8 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 102 \\ 51 & 151 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 2) \quad A^3 + 2A^2 - 3A &= \begin{pmatrix} 49 & 102 \\ 51 & 151 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 8 & 27 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 49 & 102 \\ 51 & 151 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 & 32 \\ 16 & 54 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 62 & 128 \\ 64 & 190 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Contoh 2.23

Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Tentukanlah:

- $(AB)C$ dan $A(BC)$
- $A(B + C)$ dan $AB + AC$
- $(B + C)A$ dan $BA + CA$

Jawab:

$$\begin{aligned}
 a) \quad (AB)C &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(BC) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi, $(AB)C = A(BC)$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } A(B + C) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \\
 AB + AC &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi, $A(B + C) = AB + AC$

$$\begin{aligned}
 \text{3) } (B + C)A &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \\
 BA + CA &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi, $(B + C)A = BA + CA$

Untuk setiap matriks A , B , dan C (yang dapat dijumlahkan/dikalikan) dipenuhi:

1. $(AB)C = A(BC)$ → Sifat Asosiatif
2. $A(B + C) = AB + AC$ → Sifat Distributif Kiri
3. $(B + C)A = BA + CA$ → Sifat Distributif Kanan
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ → Perkalian Skalar
5. $AI = IA = A$ → Sifat Identitas
6. $AO = OA = O$ → Sifat Matriks Nol
7. $AB \neq BA$ → Tidak Berlaku Sifat Kumutatif

Tugas Kelompok

Kerjakan dengan kelompok Anda!

Buktikan bahwa:

1. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
2. $AI = IA = A$
3. $AO = OA = O$
4. $AB \neq BA$

Diskusikan dengan kelompok Anda!

Latihan 5

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan hasil perkalian matriks berikut ini:

a. $(2 \ 1 \ 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. $(-2 \ 4 \ 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (-7 \ 5 \ -6)$

2. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Tentukan matriks A^3 !

3. Tentukan nilai $ab + 2cd$ jika $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$!

4. Diketahui matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Tentukan:

- | | |
|---------|------------------|
| a. AB | d. $A^t \cdot C$ |
| b. AC | e. $B^t \cdot C$ |
| c. BC | f. $C^t \cdot A$ |

5. Diketahui matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Tentukan:

- $A(B + C)$
- $AB + AC$
- $(B + C)A$
- $BA + CA$

C. Determinan dan Invers Matriks

Pada pembahasan berikut ini, kita akan mempelajari cara menentukan determinan dan invers matriks, khususnya matriks berordo 2×2 , dan penggunaannya untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

1. Determinan Matriks

Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, maka hasil kali antara 4 dan 3

dikurangi hasil kali 1 dan 2, yaitu $12 - 2 = 10$ dinamakan determinan. Determinan sebuah matriks adalah sebuah angka atau skalar yang diperoleh dari elemen-elemen matriks tersebut dengan operasi tertentu.

Penulisan determinan adalah dengan garis lurus.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ maka determinan matriks } A:$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

- a. Memahami determinan matriks ordo 2×2

Khusus untuk matriks ordo 2×2 , nilai determinannya merupakan hasil kali elemen–elemen pada diagonal utama dikurangi hasil kali elemen–elemen pada diagonal samping.

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan matriks A didefinisikan:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh 2.25

- 1) Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Hitunglah determinan matriks A !

Jawab:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (5)(-4) - (2)(-3) = -20 + 6 = -14$$

- b. Memahami determinan matriks ordo 3×3 (pengayaan)

Untuk menentukan determinan matriks ordo 3×3 , yaitu dengan meletakkan lagi elemen–elemen kolom pertama dan kedua di sebelah kanan kolom ketiga.

Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, maka determinan matriks A :

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$(-) \quad (-) \quad (-) \quad (+) \quad (+) \quad (+)$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Contoh 2.26

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Hitunglah determinan matriks A !

Jawab:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$(-) \quad (-) \quad (-) \quad (+) \quad (+) \quad (+)$

$$= (3)(1)(7) + (4)(0)(5) + (2)(-2)(2) - (2)(1)(5) - (3)(0)(2) - (4)(-2)(7)$$

$$= 21 + 0 - 8 - 10 - 0 + 56$$

$$= 59$$

Catatan

- ☐ Matriks yang determinannya nol (0) disebut matriks singular dan tidak mempunyai invers.
- ☐ Matriks yang determinannya tidak nol (0) disebut matriks taksingular atau nonsingular dan selalu mempunyai invers.

Latihan 6

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan determinan dari matriks berikut:

a. $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

c. $C = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

2. Diketahui determinan matriks $A = \begin{pmatrix} x+2 & 4x-2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ bernilai 0.
Hitunglah nilai x !
3. Tentukan nilai a yang mungkin jika persamaannya seperti berikut:
 - a. $\begin{vmatrix} -3a & 3 \\ 3 & -a \end{vmatrix} = 3$
 - b. $\begin{vmatrix} 5a & 2a+1 \\ 2a & a \end{vmatrix} = 0$ dengan $a \neq 0$
4. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 6 & 3x-1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2x & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Bila $|A| = 7|B|$,
tentukan nilai x !

2. Invers Matriks

Dalam perkalian bilangan real, $a \times 1 = 1 \times a = a$, $a \in R$. Dalam hal ini, 1 adalah elemen identitas. Selain itu, juga diketahui bahwa $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$ dengan $a, b \in R$ dan $\frac{b}{a}$ dikatakan saling invers.

a. Dua Matriks Saling Invers

Invers suatu matriks dapat digunakan untuk memecahkan sistem persamaan linear yang sederhana atau rumit. Jika A dan B merupakan matriks persegi berordo sama dan berlaku $AB = BA = I$, maka B adalah invers A ($B = A^{-1}$) atau A adalah invers B ($A = B^{-1}$). Berarti A dan B saling invers.

Contoh 2.27

Jika diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Apakah A dan B saling invers?

Jawab:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & -12+12 \\ 6-6 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & 12-12 \\ -6+6 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Jadi, $AB = BA = I$, sehingga A merupakan invers B atau B merupakan invers A (A dan B saling invers).

- b. Menentukan invers matriks persegi ordo 2×2

Misalkan matriks persegi berordo 2 yang akan kita cari inversnya adalah:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan inversnya } A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \text{ maka:}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh sistem persamaan linear dua variabel sebagai berikut:

$$1) \begin{cases} ap+br = 1 \\ cp+dr = 0 \end{cases} \text{ diperoleh } p = \frac{d}{ad-bc}$$

$$r = \frac{-c}{ad-bc}$$

$$2) \begin{cases} aq+bs = 0 \\ cq+ds = 1 \end{cases} \text{ diperoleh } q = \frac{-b}{ad-bc}$$

$$s = \frac{a}{ad-bc}$$

Sehingga:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
\text{Jika } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ maka } A^{-1} &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&\text{dengan } ad - bc \neq 0
\end{aligned}$$

Contoh 2.28

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$!

Jawab:

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{(3)(2) - (4)(1)} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Contoh 2.29

Jika X matriks berordo 2×2 , tentukanlah X dari persamaan berikut ini!

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Jawab:

Untuk mencari X , kedua ruas dikalikan dengan invers $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ di

sebelah kanan.

Sehingga:

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tugas Kelompok

Kerjakan dengan kelompok Anda!

1. Tunjukkan bahwa sistem persamaan linear $\begin{cases} ap + br = 1 \\ cp + dr = 0 \end{cases}$ mempunyai penyelesaian:

$$p = \frac{d}{ad - bc} \text{ dan } r = \frac{-c}{ad - bc}$$

2. Tunjukkan bahwa sistem persamaan linear $\begin{cases} aq + bs = 0 \\ cq + ds = 1 \end{cases}$ mempunyai penyelesaian:

$$q = \frac{-b}{ad - bc} \text{ dan } s = \frac{a}{ad - bc}$$

D. Invers Matriks Ordo 3 (pengayaan)

Sebelum mempelajari invers ordo 3, Anda harus paham terlebih dulu mengenai minor, kofaktor, dan adjoin.

1. Pengertian Minor

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Jika elemen–elemen pada baris ke- i , kolom ke- j dari matriks A dihapus, maka akan diperoleh matriks persegi berordo 2. Determinan dari matriks persegi ordo 2 itu merupakan minor matriks A dan ditulis dengan lambang $|M_{ij}|$ disebut minor a_{ij} .

Matriks ordo 3 memiliki minor sebanyak 9 buah.

a) Jika baris pertama dan kolom pertama dihapus, maka:

$$\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ diperoleh } \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sehingga minor a_{11} adalah $|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

b) Jika baris pertama kolom kedua dihapus, maka:

$$\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ diperoleh } \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sehingga minor a_{12} adalah $|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

c) Jika baris pertama kolom ketiga dihapus, maka:

$$\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ diperoleh } \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Sehingga minor a_{13} adalah $|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Demikian seterusnya sampai minor ke-9 atau $|M_{33}|$.

2. Pengertian Kofaktor

Jika $|M_{ij}|$ adalah minor a_{ij} dari matriks A , maka bentuk $(-1)^{i+j}$

$|M_{ij}|$ disebut kofaktor dari a_{ij} , sehingga:

$$\text{Kofaktor } a_{11} \text{ adalah } c_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = +|M_{11}|$$

$$\text{Kofaktor } a_{12} \text{ adalah } c_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -|M_{12}|$$

$$\text{Kofaktor } a_{13} \text{ adalah } c_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = +|M_{13}|$$

$$\text{Kofaktor } a_{21} \text{ adalah } c_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = -|M_{21}|$$

$$\text{Kofaktor } a_{22} \text{ adalah } c_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = +|M_{22}|$$

$$\text{Kofaktor } a_{23} \text{ adalah } c_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = -|M_{23}|$$

$$\text{Kofaktor } a_{31} \text{ adalah } c_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| = +|M_{31}|$$

$$\text{Kofaktor } a_{32} \text{ adalah } c_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = -|M_{32}|$$

$$\text{Kofaktor } a_{33} \text{ adalah } c_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}| = +|M_{33}|$$

3. Pengertian Adjoin

Jika c_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} pada matriks A , maka adjoin matriks A (disingkat $\text{adj } A$) ditentukan oleh:

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Atau

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Contoh 2.30

Tentukan minor, kofaktor, dan adjoin dari matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$!

Jawab:

1. Minor:

$$\text{Minor } a_{11} = |M_{11}| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (-3)(4) - (-2)(-1) = -12 - 2 = -14$$

$$\text{Minor } a_{12} = |M_{12}| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 - (-10) = 10$$

$$\text{Minor } a_{13} = |M_{13}| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-15) = 15$$

$$\text{Minor } a_{21} = |M_{21}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-1) = 13$$

$$\text{Minor } a_{22} = |M_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3$$

$$\text{Minor } a_{23} = |M_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 15 = -17$$

$$\text{Minor } a_{31} = |M_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6 - (-3) = -3$$

$$\text{Minor } a_{32} = |M_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4$$

$$\text{Minor } a_{33} = |M_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6$$

2. Kofaktor:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = +|M_{11}| = -14$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = -|M_{12}| = -10$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = +|M_{13}| = 15$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = -|M_{21}| = -13$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = +|M_{22}| = 3$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = -|M_{23}| = 17$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| = +|M_{31}| = -3$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = -|M_{32}| = 4$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}| = +|M_{33}| = -6$$

3. Adjoin

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -13 & -3 \\ -10 & 3 & 4 \\ 15 & 17 & -6 \end{pmatrix}$$

4. Invers Matriks Ordo 3 x 3

Jika $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ dan $\det A \neq 0$, maka invers A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$$

Contoh 2.31

Carilah invers matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$!

Jawab:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (2)(-3)(4) + (3)(-2)(5) + (1)(0)(-1) - (1)(-3)(5) - (2)(-2)(-1) - (3)(0)(4) \\ &= -24 - 30 - 0 + 15 - 4 - 0 \\ &= -43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A \\
 &= -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} -14 & -13 & -3 \\ -10 & 3 & 4 \\ 15 & 17 & -6 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{14}{43} & \frac{13}{43} & \frac{3}{43} \\ \frac{10}{43} & -\frac{3}{43} & -\frac{4}{43} \\ -\frac{15}{43} & -\frac{17}{43} & \frac{6}{43} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Latihan 7

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan invers dari matriks di bawah ini!

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{b. } B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{c. } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Jika X adalah matriks ordo 2×2 , tentukanlah matriks X berikut:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \\
 \text{b. } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} \\
 \text{c. } X \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 & 33 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \\
 \text{d. } X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 20 & 14 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3. Diketahui matriks $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Tentukan:

a. CD

c. C^{-1}

e. $C^{-1}D^{-1}$

g. $(CD)^{-1}$

b. DC

d. D^{-1}

f. $D^{-1}C^{-1}$

h. $(DC)^{-1}$

4. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Tentukan:

a. $|M_{13}|$

c. $|M_{32}|$

e. c_{23}

b. $|M_{22}|$

d. c_{11}

f. c_{31}

5. Tentukanlah adjoin dan invers dari matriks–matriks berikut.

a. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

b. $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 0 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

4. Penggunaan Matriks untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear

Kita telah mengetahui bahwa untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dapat digunakan metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi, maupun metode campuran. Pada sub bab ini, kita akan mempelajari cara lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel, yaitu dengan menggunakan matriks.

Bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Jika diubah ke dalam matriks menjadi:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

a. Menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dengan invers matriks

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Jika $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, maka:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Jadi, diperoleh:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

- b. Menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dengan determinan

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian untuk nilai x dan y dapat dinyatakan dengan notasi determinan, yaitu:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

atau

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}; D \neq 0$$

dengan ketentuan sebagai berikut:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ adalah determinan dari koefisien-koefisien variabel x dan y .

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ adalah determinan D dengan bagian kolom pertamanya diganti oleh konstanta c_1 dan c_2 .

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ adalah determinan D dengan bagian kolom keduanya diganti oleh konstanta c_1 dan c_2 .

Contoh 2.2

Tentukan himpunan penyelesaian dari:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$$

- dengan invers matriks;
- dengan determinan!

Jawab:

Persamaan matriksnya adalah:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- Dengan invers matriks

Misal $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, maka:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{2 \cdot 1 - 4 \cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{3, 2\}$.

b. Dengan determinan

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 14 & 4 \\ 11 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{14 - 44}{2 - 12}$$

$$= \frac{-30}{-10}$$

$$= 3$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}$$

Info Matematika

Arthur Cayley (1821 - 1895) merupakan orang yang pertama kali memperkenalkan matriks dalam sebuah studi tentang sistem persamaan linear dan transformasi linear di Inggris pada tahun 1859. Matriks sempat tidak dianggap karena tidak dapat diaplikasikan. Akhirnya, pada tahun 1925, yaitu 30 tahun setelah Cayley wafat, matriks diakui memegang peranan penting dalam perkembangan mekanika kuantum.

$$\begin{aligned}
&= \frac{22 - 42}{2 - 12} \\
&= \frac{-20}{-10} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{3, 2\}$.

Sekarang, Anda tentu dapat menyelesaikan permasalahan di depan, bukan? Coba perhatikan uraian berikut ini.

Fita membeli 3 kg jeruk dan 4 kg manggis dengan harga keseluruhan Rp38.000,00. Ratna membeli 2 kg jeruk dan 3 kg manggis dengan harga keseluruhan Rp27.000,00. Untuk menentukan harga jeruk dan manggis tiap kg-nya, kita dapat membuat model matematikanya dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38.000 \\ 27.000 \end{pmatrix}$$

dengan x = harga jeruk tiap kg dan y = harga manggis tiap kg.

$$\begin{aligned}
\text{Misal } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ maka } A^{-1} &= \frac{1}{9-8} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sehingga } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38.000 \\ 27.000 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3(38.000) + (-4)(27.000) \\ -2(38.000) + 3(27.000) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 114.000 - 108.000 \\ -76.000 + 81.000 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6.000 \\ 5.000 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Jadi, harga jeruk adalah Rp6.000,00 per kg dan harga manggis Rp5.000,00 per kg.

Penyelesaian permasalahan di atas dengan menggunakan invers matriks. Dapatkah Anda menemukan penyelesaiannya dengan menggunakan determinan? Apakah hasilnya sama?

Tugas Kelompok

Kerjakan dengan kelompok Anda!

Carilah artikel di koran, majalah, internet, dan sebagainya mengenai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang berbentuk sistem persamaan linear dua variabel. Buatlah model matematikanya dan temukan penyelesaiannya dengan menggunakan invers matriks dan determinan. Diskusikan hasilnya dengan guru Anda.

Latihan 8

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan invers matriks.

a.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x + 4y = 8 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 7x - 4y = 2 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 2x - 3y - 4 = 0 \\ 4x + 5y + 14 = 0 \end{cases}$$

2. Tentukan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan determinan.

a.
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4x + y = 21 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 7x + 4y = 17 \\ 6x - 5y = 23 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 4x - 5y + 8 = 0 \\ 5x - y - 11 = 0 \end{cases}$$

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut:

a.
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 8 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} \frac{1}{3}p + \frac{1}{5}q = 3 \\ \frac{2}{3}p - \frac{3}{5}q = -4 \end{cases}$$

4. Perhatikan tabel di bawah ini!

Tabel 3.3

	Iwan	Irfan
Hari biasa	10 jam	6 jam
Hari libur	3 jam	4 jam

(a)

	Honor lembur
Iwan	Rp146.000,00
Irfan	Rp78.000,00

(b)

Kedua tabel tersebut menunjukkan banyak jam dan honor lembur dua karyawan suatu perusahaan dalam satu minggu. Tentukan honor lembur tiap jamnya pada hari biasa dan hari libur!

5. Pada ujian Bahasa Inggris ada dua tipe soal yang harus dikerjakan. Untuk mengerjakan soal A, Dewi membutuhkan waktu rata-rata 3 menit per nomornya dan waktu rata-rata 2 kali lipatnya untuk soal B per nomornya. Sedangkan Wahyu hanya membutuhkan waktu rata-rata 2 menit per nomor untuk soal A dan 5 menit per nomor untuk soal B. Bila Dewi mampu menyelesaikan ujian tersebut dalam waktu 2 jam, sedangkan Wahyu hanya 1,5 jam, tentukan jumlah soal pada kedua tipe soal ujian Bahasa Inggris tersebut!



Rangkuman

1. Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka transpose matriks A adalah $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
2. Dua buah matriks dikatakan sama jika ordo kedua matriks sama dan elemen-elemen yang seletak bernilai sama.
3. Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika ordo kedua matriks tersebut sama. Cara menjumlahkan adalah dengan menjumlahkan elemen-elemen yang seletak.

4. Perkalian matriks dengan bilangan adalah dengan cara mengalikan bilangan tersebut dengan elemen–elemen matriks.
5. Dua buah matriks dapat dikalikan jika banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris matriks kedua. Misalnya:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

6. Determinan ordo 2: $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

7. Invers matriks ordo 2: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.



Uji Kompetensi

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar!

1. Jika $\begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 22 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3q \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, maka tentukan nilai $3p + 2q$!
2. Jika $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3a \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, tentukan nilai $2a$!
3. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2x & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 8 & -14 \end{pmatrix}$.
Jika $A \times B^t = C$, tentukan nilai $3x$!
4. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
Tentukan:
a. $2A' + BC$
b. $3C' - (AB)'$

5. Jika diketahui $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, maka tentukan matriks X !
6. Diketahui matriks $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Tentukan matriks D yang memenuhi $DC = I$!
7. Jika $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$, maka tentukan nilai x dan y !
8. Diketahui matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Apabila $A = 2B^t$, maka tentukan nilai $3a$!

9. Tentukan invers dari matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$!
10. Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut:
- $$\begin{cases} 2x - 3y - 14 = 0 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$$
- a. dengan invers matriks;
b. dengan determinan matriks!

11. Diketahui matriks $C = \begin{pmatrix} 9 & -x \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ dan $D = \begin{pmatrix} 5+x & x \\ 5 & 3x \end{pmatrix}$.

Apabila $|C| = |D|$, maka tentukan nilai x yang memenuhi!

12. Tentukan invers dari matriks $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$!

13. Diketahui: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}$, maka tentukan nilai a , b , dan c !

14. Indra membeli 3 topi dan 2 kaos olahraga dengan harga total Rp145.000,00, sedangkan Irfan harus membayar Rp180.000,00 untuk 2 topi dan 3 kaos olahraga.
 - a. Buatlah matriks berordo 2×3 yang mungkin!
 - b. Berapa harga 4 topi dan 2 kaos olahraga?
15. Nita membeli 3 kg rambutan dan 3 kg duku dengan harga total Rp39.000,00, sedangkan Dewi membayar Rp47.000,00 untuk 2 kg rambutan dan 4 kg duku. Dengan menggunakan invers matriks, tentukan harga rambutan dan duku tiap 1 kg!

Pengayaan

Kerjakan di buku tugas Anda!

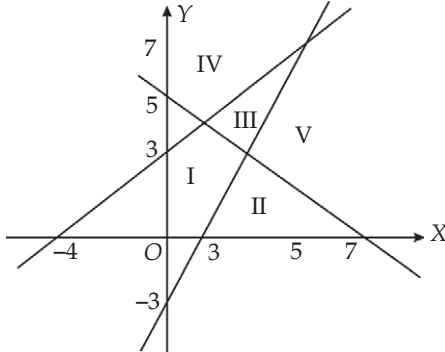
$$1. \begin{pmatrix} 1 & {}^3\log y \\ {}^2\log z & {}^{3^x}\log y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & {}^{4^2}\log z \end{pmatrix}$$

Tentukan nilai $2x + y + 3z$!

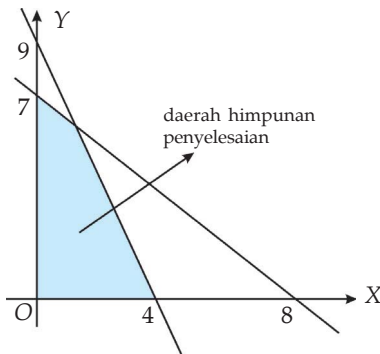
2. Sebuah perusahaan memproduksi 2 tipe sepeda. Pembuatan kedua tipe sepeda tersebut menggunakan mesin A dan mesin B. Waktu yang diperlukan untuk memproduksi sepeda tipe I adalah 2 jam di mesin A dan 3 jam di mesin B, sedangkan untuk sepeda tipe II membutuhkan waktu 3 jam di mesin A dan 2 jam di mesin B. Kedua mesin bekerja selama 18 jam tiap hari. Misalkan x adalah banyaknya sepeda tipe I dan y adalah banyaknya sepeda tipe II.
 - a. Buatlah model matematikanya!
 - b. Tentukan banyaknya sepeda tipe I dan tipe II yang diproduksi dalam seminggu (7 hari)!

I. Pilihlah jawaban yang benar!

1. Daerah yang memenuhi penyelesaian dari $2x - y \leq 3$, $5x + 7y \geq 35$, $3x - 4y \geq -12$ dengan $x, y \in R$ ditunjukkan oleh



- a. I
b. II
c. III
d. IV
e. V
2. Gambar di bawah ini menunjukkan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan



- a. $4x + 9y \leq 36$, $8x + 7y \leq 56$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
b. $4x + 9y \geq 36$, $8x + 7y \geq 56$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
c. $9x + 4y \leq 56$, $7x + 8y \leq 36$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
d. $9x + 4y \leq 36$, $7x + 8y \leq 56$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
e. $9x + 4y \geq 36$, $7x + 8y \geq 56$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

3. Kapasitas maksimum sebuah pesawat penumpang adalah 120 kursi. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg, sedangkan kelas ekonomi 30 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi 1.500 kg. Model matematika yang sesuai pernyataan tersebut adalah
- $2x + y \leq 50, x + y \leq 120, x \geq 0, y \geq 0$
 - $2x + y \geq 50, x + y \leq 120, x \geq 0, y \geq 0$
 - $2x + y \leq 50, x + y \geq 120, x \geq 0, y \geq 0$
 - $60x + 30y \geq 1.500, x + y \geq 120, x \geq 0, y \geq 0$
 - $60x + 30y \geq 1.500, x + y \leq 120, x \geq 0, y \geq 0$
4. Nilai yang memaksimumkan fungsi $z = 3x + 5y$ dengan kendala $x + 2y \leq 10, 3x + y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0$ dengan $x, y \in R$ adalah
- (1, 3)
 - (2, 4)
 - (2, 5)
 - (4, 5)
5. Diketahui sistem pertidaksamaan $x + y \geq 5, 3x + 8y \geq 24, x \geq 0, y \geq 0$ dengan $x, y \in N$ (N himpunan bilangan asli). Nilai minimum fungsi $z = 2x + y$ dicapai pada titik
- (0, 3)
 - (0, 5)
 - (1, 4)
 - (2, 3)
 - (8, 0)
6. Diketahui sistem pertidaksamaan $3x + 5y \leq 15, 6x + 3y \leq 18, x > 0, y > 0$ dengan $x, y \in N$. Nilai $2x + y$ untuk setiap titik pada daerah himpunan penyelesaian adalah
- 3 dan 4
 - 2, 3, dan 4
 - 3, 4, dan 5
 - 2, 3, 4, dan 5
 - 2, 3, 4, 5, dan 6
7. Seorang pedagang membeli pakaian dewasa seharga Rp30.000,00 dan pakaian anak-anak seharga Rp10.000,00. Kios pedagang hanya mampu menampung tidak lebih dari 60 potong pakaian. Modal pedagang Rp1.500.000,00. Jika laba pakaian dewasa Rp20.000,00 per potong dan pakaian anak-anak Rp10.000,00 per potong, maka jumlah laba maksimum yang dapat diperoleh pedagang tersebut sebesar
- Rp600.000,00
 - Rp750.000,00
 - Rp900.000,00
 - Rp1.050.000,00
 - Rp1.200.000,00

8. Diketahui $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$. Nilai $2x + y$ yang memenuhi persamaan $AB + 2A = 2C$ adalah
- 5
 - 6
 - 8
 - 9
 - 10
9. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, maka $A'B$ adalah
- $\begin{pmatrix} 20 & 22 \\ 26 & 30 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 20 & 26 \\ 30 & 22 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 26 & 20 \\ 30 & 22 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 26 & 22 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 22 & 30 \\ 20 & 26 \end{pmatrix}$
10. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 8 & 2x \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 7 & 3x+1 \end{pmatrix}$. Jika $\det A = \det B$ sama, maka nilai x yang memenuhi adalah
- 6 dan -3
 - 3 dan 3
 - 6 dan 3
 - 3 dan 6
 - 3 dan 6
11. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & -3x \\ 3 & -5x \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -x \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Agar $\det A$ sama dengan 2 kali $\det B$, maka nilai $2x$ adalah
- 1
 - 2
 - 3
 - 4

12. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Nilai $A^{-1} + 2B$ adalah

a. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

d. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$

b. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

e. $2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

13. Determinan matriks A yang memenuhi persamaan:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} A = 2 \begin{pmatrix} 25 & 16 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} \text{ adalah}$$

a. 1

b. 2

c. 3

d. 4

e. 5

14. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$. Nilai $2A^{-1}$ adalah

a. $\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -12 & 10 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 12 & -10 \\ -14 & 12 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} -12 & -10 \\ -14 & -12 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -12 & 14 \end{pmatrix}$

15. Persamaan $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 22 \end{pmatrix}$ mempunyai penyelesaian $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dots$

a. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

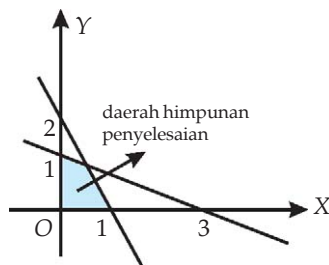
II. Kerjakan dengan benar!

1. Gambarlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan berikut:

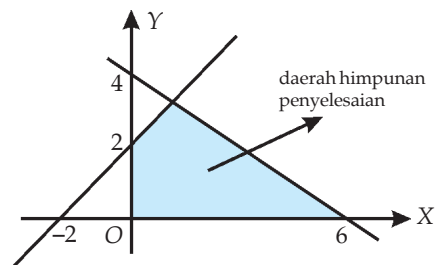
$$2x + y \leq 10, 2x + 3y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0 \text{ dengan } x, y \in \mathbb{R}$$

2. Tentukan sistem pertidaksamaan linear yang daerah himpunan penyelesaiannya ditunjukkan pada gambar berikut:

a.



b.



3. Sebuah area parkir dengan luas 200 m^2 dapat menampung maksimal 50 kendaraan. Luas rata-rata untuk parkir mobil 5 m^2 dan bus 20 m^2 . Buatlah model matematikanya!

4. Untuk menambah penghasilan, setiap hari Bu Sari membuat dua jenis gorengan untuk dijual. Setiap gorengan A membutuhkan modal Rp300,00 dengan keuntungan 30%, sedangkan setiap gorengan B membutuhkan modal Rp200,00 dengan keuntungan 40%. Modal yang tersedia setiap hari Rp100.000,00 dan paling banyak Bu Sari hanya mampu membuat 200 gorengan. Berapa persen keuntungan maksimum yang dapat diperoleh Bu Sari setiap harinya?

5. Tentukan nilai maksimum fungsi objektif $z = 7x + 9y$ dengan kendala-kendala $x + y \leq 6, 2x + 3y \leq 15, x \geq 0, y \geq 0$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$!

6. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & x-3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$. Apabila $3|A| = 2|B|$, tentukan nilai:

a. x

b. $x^2 - 5$

7. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil dari $(AB)^{-1}$!

8. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan menggunakan determinan matriks!

a.
$$\begin{cases} y + 16 = 2x \\ 3x + 2y = 17 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3x + 5y - 5 = 0 \\ 4x + 6y + 4 = 0 \end{cases}$$

9. Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut dengan menggunakan invers matriks!

a.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 3x - y = -11 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3y = 11 - 5x \\ 2x = 6y + 24 \end{cases}$$

10. Perhatikan tabel harga berikut!

	Harga per potong
Kue	Rp2.000,00
Coklat	Rp3.000,00

Purbo membeli 12 potong kue dan coklat. Ia harus membayar sebesar Rp32.000,00.

a. Nyatakan dalam bentuk operasi aljabar matriks!

b. Tentukan banyaknya kue dan coklat yang dibeli Purbo!

Bab 3

Barisan dan Deret

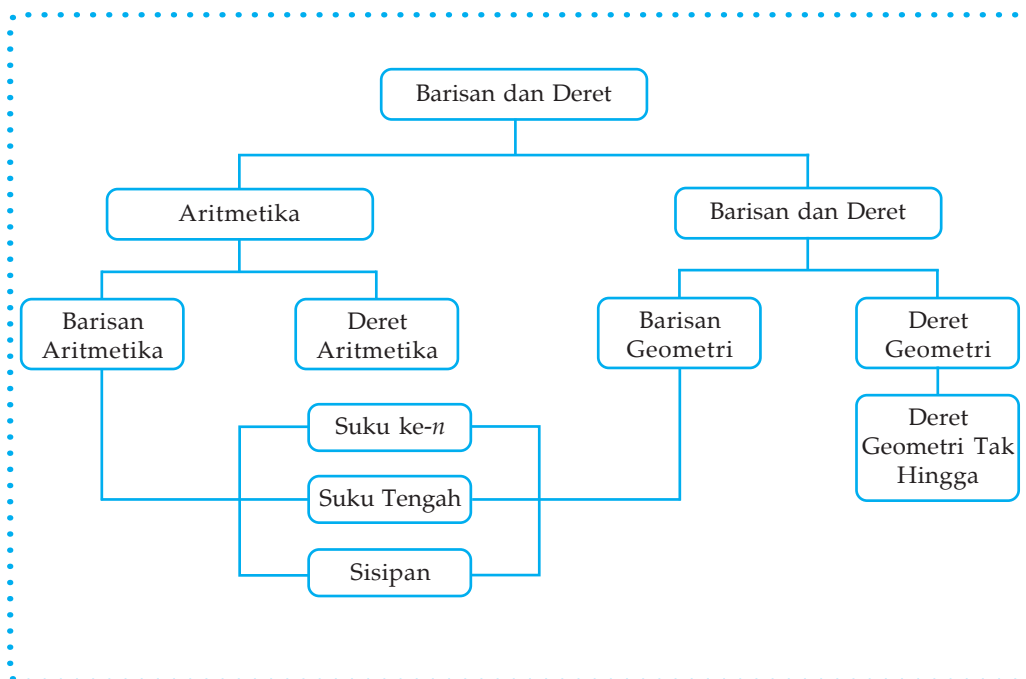
Standar Kompetensi

Menggunakan konsep barisan dan deret dalam pemecahan masalah

Kompetensi Dasar

- ❑ Menggunakan sifat-sifat dan operasi matriks untuk menunjukkan bahwa suatu matriks persegi merupakan invers dari matriks persegi lain
- ❑ Menentukan determinan dan invers matriks 2×2
- ❑ Menggunakan determinan dan invers dalam penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel

Peta Konsep





Sumber: balivetman.files.wordpress.com

Gambar 3.1

Pak Danang merupakan seorang peternak ayam di Indonesia. Akibat serangan wabah penyakit flu burung, populasi ayam yang dimilikinya berkurang sepersepuluh setiap 10 hari sekali. Pada hari ke-40, populasi ayamnya tinggal 32.805 ekor. Dapatkah Anda menghitung berapa populasi ayam peliharaan Pak Danang semula?

Populasi ayam Pak Danang yang berkurang setiap kurun waktu tertentu membentuk suatu pola bilangan. Contoh lain dalam kehidupan sehari-hari, antara lain, jumlah tabungan di bank yang bertambah setiap hari, jumlah penduduk yang bertambah setiap tahun, dan sebagainya. Pola-pola seperti ini membentuk suatu barisan bilangan.

A. Barisan dan Deret Bilangan

1. Barisan Bilangan

Pernahkah Anda memperhatikan seorang anak kecil yang mulai belajar menyebutkan bilangan 1 sampai dengan 10? Bila Anda perhatikan, susunan bilangan tersebut membentuk suatu barisan yang memiliki pola atau aturan tertentu, yaitu menambahkan bilangan sebelumnya dengan bilangan satu. Coba Anda perhatikan susunan bilangan berikut:

- 1) 1, 2, 3, 4, 5,
merupakan barisan bilangan asli
- 2) 1, 3, 5, 7, 9,
merupakan barisan bilangan asli ganjil

Info Matematika

Leonardo Fibonacci adalah putra seorang saudagar Italia. Dalam perjalanannya ke Eropa dan Afrika Utara, ia mengembangkan kegemarannya akan bilangan. Dalam karya terbesarnya, *Liner Abaci*, ia menjelaskan suatu teka-teki yang membawanya kepada apa yang kita kenal sebagai barisan bilangan Fibonacci atau disebut juga *The Golden Number of Human Life*. Barisannya adalah 1, 1, 2, 3, 4, 8, 13, 21, Setiap bilangan dalam barisan ini merupakan jumlah dari 2 bilangan sebelumnya. Barisan bilangan Fibonacci dapat kita teliti dalam susunan daun pada bunga atau segmen-segmen dalam buah nanas atau biji cemara.

- 3) 2, 4, 6, 8, 10,
merupakan barisan bilangan asli genap
 - 4) 1, 3, 6, 10, 15,
merupakan barisan bilangan segitiga
 - 5) 1, 6, 4, 5, 7,
bukan merupakan barisan
- Jadi, barisan bilangan adalah susunan bilangan yang memiliki pola atau aturan tertentu.

Secara umum suatu barisan yang terdiri dari n suku, dinyatakan

$$U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$$

dengan:

U_1 = suku pertama

U_2 = suku kedua

U_n = suku ke- n

Contoh 3.1

Tentukan 4 suku berikutnya pada barisan:

- 1) 1, 3, 5, 7,
- 2) 2, 3, 5, 8,

Jawab:

- 1) 1, 3, 5, 7,

Dengan memperhatikan barisan tersebut, kita dapat mengetahui bahwa antarsuku mempunyai selisih 2. Jadi, barisan bilangan tersebut adalah:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

- 2) 2, 3, 5, 8,

Selisih U_1 dan U_2 adalah 1.

Selisih U_2 dan U_3 adalah 2.

Selisih U_3 dan U_4 adalah 3.

Kita dapat mengetahui bahwa selisih berikutnya adalah 4, 5, dan seterusnya. Jadi, barisan bilangan tersebut adalah:

2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30.

Contoh 3.2

Suatu barisan bilangan mempunyai aturan $U_n = 3n + 7$.

- 1) Tentukan suku ke-4!
- 2) Suku keberapakah yang nilainya 52?

Jawab:

$$\begin{aligned}\text{a. } U_4 &= 3(4) + 7 \\ &= 12 + 7 \\ &= 19\end{aligned}$$

Jadi, suku keempatnya adalah 19.

$$\begin{aligned}\text{b. } 52 &= 3n + 7 \\ 3n &= 45\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n &= \frac{45}{3} \\ &= 15\end{aligned}$$

Jadi, suku yang nilainya 52 adalah suku ke-15.

Contoh 3.3

Tentukan rumus suku ke- n dari barisan 4, 7, 10, 13,

Jawab:

$$\begin{aligned}n = 1 &\rightarrow U_1 = 4 = 3.1 + 1 \\ n = 2 &\rightarrow U_2 = 7 = 3.2 + 1 \\ n = 3 &\rightarrow U_3 = 10 = 3.3 + 1 \\ n = 4 &\rightarrow U_4 = 13 = 3.4 + 1 \\ U_n &= 3n + 1\end{aligned}$$

Jadi, rumus suku ke- n adalah $U_n = 3n + 1$.

2. Deret Bilangan

Perhatikan barisan yang terdiri dari 10 bilangan cacah genap berikut:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18

Jika suku-suku tersebut kita jumlahkan, maka akan diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18$$

Penjumlahan suku-suku barisan tersebut dinamakan deret bilangan.

Misalkan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ merupakan suku-suku suatu barisan. Penjumlahan suku-suku barisan tersebut dinamakan deret dan dituliskan: $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$.

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan empat suku berikutnya dari barisan bilangan:
 - a. $-9, -7, -5, -3, \dots$
 - b. $2, 5, 10, 17, \dots$
 - c. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$
 - d. $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots$
2. Tentukan rumus suku ke- n dari barisan-barisan berikut:
 - a. $2, 4, 6, 8, \dots$
 - b. $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots$
 - c. $8, 11, 14, 17, \dots$
 - d. $-7, -4, -1, 2, \dots$
3. Tentukan empat suku pertama dari barisan yang mempunyai aturan berikut:
 - a. $U_n = 3n - 5$
 - b. $U_n = \frac{1}{2}n^2 + 3$
 - c. $U_n = 4n^2$
 - d. $U_n = n(n^2 + 1)$
4. Suatu barisan bilangan mempunyai rumus suku ke- n sebagai berikut: $U_n = 3(2n^2 + 5)$. Tentukan:
 - a. $U_2 + U_3$;
 - b. nilai n untuk $U_n = 165$!
5. Tulislah deret-deret berikut dan hitung jumlahnya!
 - a. deret 10 bilangan asli yang pertama;
 - b. deret 9 bilangan segitiga yang pertama;
 - c. deret 10 bilangan persegi yang pertama;
 - d. deret 9 bilangan Fibonacci yang pertama!

Tugas Kelompok

Kerjakan dengan kelompok Anda!

Ada beberapa tokoh ilmuwan yang berjasa besar dalam perkembangan konsep barisan dan deret, di antaranya, Fibonacci, Gauss, Pascal, de Morgan, dan masih banyak lagi. Tugas Anda adalah membuat makalah tentang salah seorang dari tokoh-tokoh tersebut. Anda dapat mencari informasi di perpustakaan, internet, dan sebagainya. Presentasikan hasilnya di depan kelas.

B. Barisan dan Deret Aritmetika

1. Barisan Aritmetika

Perhatikan barisan-barisan bilangan berikut ini.

- 1, 2, 3, 4,
- 2, 4, 6, 8,
- 9, -6, -3, 0,

Ketiga barisan tersebut mempunyai karakteristik tertentu, yaitu selisih dua suku berurutan selalu bernilai tetap. Selisih tersebut dinamakan beda dan dinotasikan dengan huruf b .

- Untuk barisan 1, 2, 3, 4, ... ; $b = 4 - 3 = 3 - 2 = 2 - 1 = 1$
- Untuk barisan 2, 4, 6, 8, ... ; $b = 8 - 6 = 6 - 4 = 4 - 2 = 2$
- Untuk barisan -9, -6, -3, 0, ... ; $b = 0 - (-3) = -3 - (-6) = -6 - (-9) = 3$

Ketiga barisan tersebut dinamakan barisan aritmetika.

- Suku ke- n Suatu Barisan Aritmetika

Misalkan U_1, U_2, \dots, U_n adalah barisan aritmetika dengan selisih b dan suku pertama a , maka:

$$U_1 = a$$

$$U_2 = U_1 + b = a + b = a + (2 - 1)b$$

$$U_3 = U_2 + b = a + b + b = a + 2b = a + (3 - 1)b$$

$$\begin{aligned} U_n &= U_{n-1} + b \\ &= [a + (n-2)b] + b \\ &= a + (n-1)b \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

Bentuk umum barisan aritmetika:

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots, a + (n-1)b$$

dengan: $a = U_1$ (suku pertama)

$$b = U_n - U_{n-1}$$

Jadi, rumus umum suku ke- n barisan aritmetika adalah:

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Contoh 3.4

Diketahui suatu deret aritmetika 2, 4, 6, 8, Tentukan suku ke-10!

Jawab:

$$a = 2$$

$$b = 4 - 2 = 2$$

$$n = 10$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$\begin{aligned} U_{15} &= 2 + (10 - 1)2 \\ &= 2 + 9(2) \\ &= 2 + 18 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Contoh 3.5

Suatu barisan aritmetika mempunyai suku ke-2 = 14 dan suku ke-4 = 24.

Tentukan:

a. suku ke- n ;

b. suku ke-25!

Jawab:

$$\text{a. } U_2 = a + b = 14$$

$$\begin{array}{r} U_4 = a + 3b = 24 \\ \hline -2b = -10 \\ b = 5 \end{array}$$

$$a + b = 14$$

$$a + 5 = 14$$

$$a = 9$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$= 9 + (n - 1)5$$

$$= 9 + 5n - 5$$

$$= 5n + 4$$

$$\text{b. } U_n = 5n + 4$$

$$U_{25} = 5(25) + 4$$

$$= 125 + 4$$

$$= 129$$

Contoh 3.6

Diketahui barisan aritmetika $U_2 + U_4 = 40$ dan $U_3 + U_5 = 46$.

Tentukan:

a. suku pertama dan bedanya;

$$\text{b. } U_2 + \frac{1}{2} U_3 + U_6!$$

Jawab:

$$\begin{aligned} \text{a. } U_2 + U_4 &= 40 \\ (a + b) + (a + 3b) &= 40 \\ 2a + 4b &= 40 \\ a + 2b &= 20 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3 + U_5 &= 46 \\ (a + 2b) + (a + 4b) &= 46 \\ 2a + 6b &= 46 \\ a + 3b &= 23 \quad \dots (2) \end{aligned}$$

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$\begin{array}{rcl} a + 2b & = & 20 \\ a + 3b & = & 23 \\ \hline -b & = & -3 \\ b & = & 3 \end{array}$$

Nilai b disubstitusikan ke dalam persamaan (1)

$$\begin{aligned} a + 2b &= 20 \\ a + 2(3) &= 20 \\ a + 6 &= 20 \\ a &= 14 \end{aligned}$$

Jadi, $a = 14$ dan $b = 3$.

$$\begin{aligned} \text{b. } U_n &= a + (n - 1)b \\ U_2 &= 14 + (2 - 1)3 \\ &= 14 + 3 \\ &= 17 \\ U_3 &= 14 + (3 - 1)3 \\ &= 14 + 2(3) \\ &= 14 + 6 \\ &= 20 \\ U_6 &= 14 + (6 - 1)3 \\ &= 14 + 5(3) \\ &= 14 + 15 \\ &= 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2 + \frac{1}{2} U_3 + U_6 &= 17 + \frac{1}{2}(20) + 29 \\ &= 17 + 10 + 29 \\ &= 56 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, nilai } U_2 + \frac{1}{2} U_3 + U_6 = 56.$$

b. Suku Tengah Barisan Aritmetika

Barisan aritmetika yang jumlah sukunya ganjil dan minimal terdiri dari 3 suku memiliki suku tengah (U_p).

$$\begin{aligned}
 U_1, U_2, U_3 &\rightarrow \text{suku tengahnya } U_2 \\
 U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 &\rightarrow \text{suku tengahnya } U_3 \\
 U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7 &\rightarrow \text{suku tengahnya } U_4
 \end{aligned}$$

Misalnya diberikan barisan aritmetika $U_1, U_2, \dots, U_t, U_t + 1, \dots, U_{2t-1}$ dengan suku tengah U_t dan banyaknya suku $2t - 1$, maka berdasarkan rumus U_n diperoleh:

$$\begin{aligned}
 U_t &= a + (t - 1)b \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2a + \frac{1}{2} \cdot 2(t - 1)b \\
 &= \frac{1}{2} [2a + 2(t - 1)b] \\
 &= \frac{1}{2} [a + \underbrace{a + (2t - 2)b}_{U_{2t-1}}] \\
 &= \frac{1}{2} (a + U_{2t-1}) \\
 &= \frac{1}{2} (U_1 + U_{2t-1})
 \end{aligned}$$

Jadi, besarnya suku tengah dihitung dengan rumus:

$$U_t = \frac{1}{2} (U_1 + U_{2t-1}) \quad \text{atau} \quad U_t = \frac{1}{2} (U_1 + U_n)$$

dengan:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{1}{2} (n + 1) \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\
 U_t &= \text{suku tengah} \\
 a &= U_1 = \text{suku pertama} \\
 b &= \text{selisih} \\
 U_n &= U_{2t-1} = \text{suku ke-}n \text{ (suku terakhir)}
 \end{aligned}$$

Contoh 3.7

Ditentukan barisan aritmetika 5, 9, 13, ..., 125. Tentukan suku tengahnya dan merupakan suku beberapa?

Jawab:

$$5, 9, 13, \dots, 125$$

$$a = 5$$

$$b = 4$$

$$U_n = 125$$

$$U_t = \frac{U_1 + U_n}{2} = \frac{5 + 125}{2} = \frac{130}{2} = 65$$

Jadi, suku tengahnya $U_t = 65$

$$U_t = a + (t - 1)b$$

$$65 = 5 + (t - 1)4$$

$$65 = 5 + 4t - 4$$

$$65 = 1 + 4t$$

$$4t = 64$$

$$t = 16$$

Jadi, suku tengahnya merupakan suku ke-16.

Contoh 3.8

Suku tengah suatu barisan aritmetika sama dengan 247, suku ketujuhnya 32, dan suku terakhirnya 492. Tentukan:

- suku pertama dan bedanya;
- banyaknya suku pada barisan aritmetika tersebut!

Jawab:

a. $U_t = 247$

$$U_n = 492$$

$$U_t = \frac{U_1 + U_n}{2}$$

$$247 = \frac{a + 492}{2}$$

$$494 = a + 492$$

$$a = 2$$

$$U_7 = 32$$

$$a + 6b = 32$$

$$2 + 6b = 32$$

$$6b = 30$$

$$b = 5$$

Jadi, suku pertama = 2 dan bedanya = 5.

b. $U_n = 492$

$$a + (n - 1)b = 492$$

$$2 + (n - 1)5 = 492$$

$$(n - 1)5 = 490$$

$$n - 1 = \frac{490}{5}$$

$$= 98$$

$$n = 99$$

Jadi, barisan tersebut mempunyai 99 suku.

c. Sisipan pada Barisan Aritmetika

Perhatikan barisan 1, 9, 17. Jika di antara dua suku yang berurutan disisipkan 3 bilangan, maka diperoleh barisan yang baru, yaitu 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. Beda barisan semula adalah 8, sedangkan beda barisan yang baru adalah 2. Sehingga:

$$2 = \frac{8}{3+1}$$

Banyaknya suku barisan yang baru adalah 9, diperoleh dari: $9 = 3 + (3 - 1)3$ (dengan banyak suku yang disisipkan 3 dan banyak suku semula 3).

Jika setiap dua suku berurutan pada barisan aritmetika disisipkan k suku, maka barisan aritmetika yang baru mempunyai:

$$b' = \frac{b}{k+1}$$

$$n' = n + (n-1)k$$

dengan:

b' = beda setelah disisipi

n' = banyaknya suku setelah disisipi

b = beda sebelum disisipi

n = banyaknya suku sebelum disisipi

Contoh 3.9

Di antara bilangan 2 dan bilangan 50 disisipkan 5 bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika. Hitunglah beda dari barisan tersebut!

Jawab:

$$k = 5$$

$$b = 50 - 2 = 48$$

$$b' = \frac{b}{k+1} = \frac{48}{5+1} = \frac{48}{6} = 8$$

Jadi, beda barisan yang baru (b') adalah 8.

Latihan 1

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan nilai suku ke-25 jika diketahui:

a. $U_1 = 5$ dan $b = 4$

b. $U_2 = 10$ dan $b = 5$

c. $U_3 = -6$ dan $U_{11} = 18$

2. Tentukan nilai a , b , dan U_n dari barisan aritmetika di bawah ini jika:
 - a. $U_2 = 17$ dan $U_5 = 35$
 - b. $U_9 = \frac{1}{2}$ dan $U_{15} = 3\frac{1}{2}$
 - c. $U_3 = -11$ dan $U_{10} = 10$
3. Pada barisan aritmetika diketahui $U_5 = -7$ dan $U_3 + U_{10} = -8$. Tentukan:
 - a. suku pertama dan beda;
 - b. $U_2 + U_{20}$!
4. Diketahui barisan aritmetika $-5\frac{1}{2}, -5, -4\frac{1}{2}, -4, \dots$. Tentukan:
 - a. rumus suku ke- n ;
 - b. $U_5 + U_{10}$!
5. Diketahui bilangan asli antara 100 dan 400. Tentukan banyaknya suku yang:
 - a. habis dibagi 2;
 - b. habis dibagi 5;
 - c. habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 5!
6. Jika suku terakhir suatu barisan aritmetika adalah 492, suku pertamanya adalah -3 , dan suku keempatnya adalah 12, tentukan banyak suku barisan tersebut!
7. Ditentukan barisan aritmetika 11, 15, 19, ..., 307. Tentukan suku tengahnya dan merupakan suku keberapakah?
8. Suku tengah dan suku terakhir suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 171 dan 341. Jika suku ke-2 adalah 11, maka tentukan:
 - a. suku pertama dan beda barisan tersebut;
 - b. banyak suku pada barisan tersebut!
9. Di antara bilangan 20 dan bilangan 35 disisipkan empat bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika. Tentukan:
 - a. beda setelah disisipi;
 - b. barisan bilangan tersebut!
10. Di antara dua suku berurutan pada barisan bilangan 15, 31, 47, ... disisipi 3 buah bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika yang baru. Tentukan:
 - a. beda setelah disisipi;
 - b. suku ke-15 dari barisan aritmetika yang baru!

2. Deret Aritmetika

Perhatikan barisan aritmetika berikut:

- 1, 4, 7, ..., 58
- 2, 6, 10, ..., 38

Jika barisan aritmetika tersebut dijumlahkan beruntun, maka akan diperoleh bentuk sebagai berikut:

- $1 + 4 + 7 + \dots + 58$
- $2 + 6 + 10 + \dots + 38$

Bentuk penjumlahan aritmetika tersebut dinamakan deret aritmetika.

Jadi, deret aritmetika dari barisan aritmetika $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ adalah:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n.$$

Jika S_n menyatakan jumlah n suku pertama, maka:

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = U_1 \\ S_2 = U_1 + U_2 \\ S_3 = U_1 + U_2 + U_3 \\ \dots \\ S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} U_2 = S_2 - S_1 \\ U_3 = S_3 - S_2 \\ \dots \\ U_n = S_n - S_{n-1} \end{array}$$

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$U_1 = a, U_2 = a + b, U_3 = a + 2b, \dots, U_{n-2} = a + (n-3)b = U_n - 2b, U_{n-1} = U_n - b,$$

maka:

$$S_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + (U_n - 2b) + (U_n - b) + U_n$$

$$S_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \dots + (a + 2b) + (a + b) + a$$

$$2S_n = \underbrace{(a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \dots + (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n)}_{\text{sebanyak } n \text{ suku}} +$$

$$\text{Sehingga: } 2S_n = n(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

Karena $U_n = a + (n-1)b$, maka:

$$S_n = \frac{1}{2}n[a + a(n-1)b]$$

$$\text{Jadi, } S_n = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)b]$$

Catatan

Deret harmonis adalah barisan bilangan-bilangan yang kebalikannya membentuk sebuah deret aritmetika.

Contoh:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \dots$$

Contoh 3.10

Hitunglah jumlah 15 suku pertama dari deret aritmetika $2 + 5 + 8 + \dots$!

Jawab:

$$a = 2, b = 3, n = 15$$

$$S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)b]$$

$$S_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15[2(2) + (15 - 1)3]$$

$$= \frac{15}{2} [4 + 14(3)]$$

$$= \frac{15}{2} (4 + 42)$$

$$= \frac{15}{2} \cdot 46$$

$$= 345$$

Contoh 3.11

Tentukan jumlah bilangan asli antara 10 dan 100 yang habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 5!

Jawab:

- a. Bilangan yang habis dibagi 2 adalah: $12 + 14 + 16 + \dots + 98 = S_n$

$$a = 12, b = 2, U_n = 98$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$98 = 12 + (n - 1)2$$

$$98 = 12 + 2n - 2$$

$$98 = 2n + 10$$

$$2n = 88$$

$$n = 44$$

$$S_n = \frac{1}{2} n(a + U_n)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 44(12 + 98)$$

$$= 22(110)$$

$$= 2.420$$

Info Matematika

Salah satu tokoh ajaib dalam Matematika adalah Carl Friedrich Gauss. Pada saat usianya belum menginjak 3 tahun, Gauss batita telah mengoreksi daftar gaji tukang batu ayahnya. Kejeniusannya juga tampak ketika ia berusia 10 tahun. Ketika gurunya meminta murid-murid untuk menjumlahkan angka dari 1 sampai 100, Gauss segera mencoretkan 5.050 di atas batu tulisnya. Matematikawan Jerman kelahiran tahun 1777 ini juga berjasa besar dalam bidang analisis, geometri, elektrik, relativitas, dan energi atom. Pada usia 19 tahun, Gauss telah mulai menuliskan Matematika dalam lambang ciptaannya sendiri.

- b. Bilangan yang habis dibagi 2 dan habis dibagi 5 adalah:

$$20 + 30 + \dots + 90 = S_n$$

$$a = 20, b = 10, \text{ dan } U_n = 90$$

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$90 = 20 + (n - 1)10 - 10$$

$$90 = 20 + 10n$$

$$10n = 80$$

$$n = 8$$

$$S_n = \frac{1}{2} n(a + U_n)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8(20 + 90)$$

$$= 4(110)$$

$$= 440$$

Jadi, jumlah bilangan asli antara 10 dan 100 yang habis dibagi 2, tetapi tidak habis dibagi 5 adalah $2.420 - 440 = 1.980$.

Latihan 3

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Hitunglah jumlah 20 suku pertama dari deret aritmetika berikut ini:
 - a. $2 + 5 + 8 + \dots$
 - b. $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + \dots$
 - c. $-100 - 97 - 94 - \dots$
 - d. $-\frac{7}{2} - \frac{5}{2} - \frac{3}{2} - \dots$
2. Hitunglah jumlah dari deret aritmetika berikut ini:
 - a. $1 + 3 + 5 + \dots + 51$
 - b. $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \dots + 100\sqrt{5}$
 - c. $\frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \dots + 7$
 - d. $-3 - 6 - 9 - \dots - 30$

3. Diketahui jumlah deret aritmetika $2 + 5 + 8 + \dots$ adalah 610. Tentukan:
 - a. banyaknya suku deret tersebut;
 - b. suku terakhirnya!
4. Hitunglah jumlah bilangan asli kurang dari 300 yang habis dibagi 4, tetapi tidak habis dibagi 8!
5. Tentukan rumus suku ke- n pada deret aritmetika jika diketahui jumlah n suku pertama sebagai berikut:
 - a. $2n^2 - 7n$;
 - b. $n^2 - 14n$!

Tugas Kelompok

Kerjakan dengan kelompok Anda!

1. Diketahui deret aritmetika sebagai berikut:
 $\log a + \log ab + \log (ab)^2 + \log (ab)^3 + \dots$
 Tentukan jumlah 10 suku pertamanya!
2. Dari sebuah deret aritmetika diketahui $U_3 + U_5 + U_7 + U_9 = 132$.
 Tentukan jumlah 11 suku pertamanya!

C. Barisan dan Deret Geometri

1. Barisan Geometri

Untuk memahami barisan geometri, perhatikan barisan–barisan bilangan berikut ini.

- a. 1, 3, 9, 27,
- b. -8, -4, -2, -1,
- c. 1, 2, 2^2 , 2^3 ,

Barisan–barisan tersebut mempunyai karakteristik tertentu, yaitu perbandingan 2 suku yang berurutan selalu bernilai tetap. Perbandingan tersebut dinamakan rasio dan dinotasikan dengan huruf r .

- a. Untuk barisan 1, 3, 9, 27,

$$r = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = 3$$

- b. Untuk barisan $-8, -4, -2, -1, \dots$

$$r = \frac{-4}{-8} = \frac{-2}{-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

- c. Untuk barisan $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$

$$r = \frac{2}{1} = \frac{2^2}{2} = \frac{2^3}{2^2} = 2$$

Ketiga barisan tersebut dinamakan barisan geometri.

- a. Suku ke- n Barisan Geometri

Misalkan diketahui suatu barisan geometri $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ dengan rasio r dan $U_1 = a$, maka:

$$U_1 = a = ar^0 = ar^{1-1}$$

$$U_2 = ar = ar^1 = ar^{2-1}$$

$$U_3 = ar^2 = ar^2 = ar^{3-1}$$

...

$$U_n = ar^{n-1}$$

Sehingga suku ke- n barisan geometri adalah:

$$U_n = ar^{n-1} \text{ dengan } r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Contoh 3.12

Tentukan suku pertama, rasio, dan suku ketujuh pada barisan-barisan geometri berikut:

1) $1, -2, 4, -8, \dots$

2) $200, 100, 50, 25, \dots$

Jawab:

1) $1, -2, 4, -8, \dots$

$$a = 1, r = \frac{-2}{1} = -2$$

$$U_7 = ar^6 = 1(-2)^6 = 64$$

2) $200, 100, 50, 25, \dots$

$$a = 200, r = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$

$$U_7 = ar^6 = 200\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{25}{8}$$

Contoh 3.13

Dalam suatu barisan geometri diketahui $U_1 = 27$ dan $U_4 = 1$. Tentukan 4 suku pertama barisan geometri tersebut!

Jawab:

$$U_1 = a = 27 \text{ dan } U_4 = 1$$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_4 = ar^{4-1}$$

$$1 = 27r^3$$

$$r^3 = \frac{1}{27}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$r = \frac{1}{3}$$

Jadi, barisan geometri tersebut adalah 27, 9, 3, 1,

b. Suku Tengah Barisan Geometri

Suku tengah dari suatu barisan geometri adalah suatu suku yang letaknya di tengah-tengah barisan geometri tersebut, apabila banyaknya suku ganjil. Misalkan barisan geometri tersebut:

$$U_1, U_2, \dots, U_t, \dots, U_{2t-1}$$

Karena $U_n = ar^{n-1}$, maka:

$$U_t = ar^{t-1}$$

$$= \sqrt{(ar^{t-1})^2}$$

$$= \sqrt{a \cdot \underbrace{ar^{2t-2}}_{U_{2t-1}}}$$

$$= \sqrt{a \cdot U_{2t-1}}$$

$$= \sqrt{a \cdot U_n}$$

$$U_t = \sqrt{a U_n}$$

dengan:

$$t = \frac{1}{2}(n+1) \text{ untuk } n \text{ ganjil}$$

$$a = \text{suku pertama}$$

$$U_n = U_{2t-1} = \text{suku ke-}n \text{ (suku terakhir)}$$

Contoh 3.14

Diketahui suatu barisan geometri adalah $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots, 243$. Jika banyaknya suku pada barisan geometri tersebut adalah ganjil, tentukan:

Catatan

Jika ada tiga suku geometri U_1, U_2, U_3 membentuk barisan geometri, maka berlaku:

$$U_t = \sqrt{U_1 \cdot U_3}$$

$$U_t^2 = U_1 \cdot U_3$$

- 1) suku tengahnya dan pada suku berapa;
- 2) banyaknya suku pada barisan geometri tersebut!

Jawab:

- 1) Barisan geometri $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots, 243$.

$$a = U_1 = \frac{1}{27}$$

$$r = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{27}} = 3$$

$$U_n = U_{2t-1} = 243$$

$$\begin{aligned} U_t &= \sqrt{a \cdot U_n} \\ &= \sqrt{\frac{1}{27} \cdot 243} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Jadi, suku tengahnya adalah 3.

$$U_t = ar^{t-1}$$

$$3 = \frac{1}{27} \cdot 3^{t-1}$$

$$81 = 3^{t-1}$$

$$(3)^4 = 3^{t-1}$$

$$4 = t - 1$$

$$t = 5$$

Jadi, suku tengahnya merupakan suku ke-5.

$$2) \quad t = \frac{(n+1)}{2}$$

$$5 = \frac{(n+1)}{2}$$

$$10 = n + 1$$

$$n = 9$$

Jadi, banyaknya suku barisan geometri tersebut adalah 9 suku.

c. Sisipan pada Barisan Geometri

Di antara dua bilangan real x dan y untuk $x \neq y$ dapat disisipkan bilangan sebanyak k , dengan $k \in$ himpunan bilangan asli, sehingga x, y , dan bilangan yang disisipkan tersebut membentuk suatu barisan geometri.

$x, xr, xr^2, xr^3, \dots, xr^k, y$
sisipan

Dari barisan tersebut diperoleh:

$$\frac{y}{xr^k} = r$$

$$\frac{y}{x} = r \cdot r^k$$

$$\frac{y}{x} = r^{k+1}$$

$$r = \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}}$$

dengan:

r = rasio

k = banyaknya bilangan yang disisipkan

x = $a = U_1$ = suku pertama

y = U_n = suku terakhir

Rumus suku ke- n pada barisan yang baru adalah:

$$U_n' = ar^{n'-1}$$

dengan:

$$n' = n + (n-1)k$$

n' = banyaknya suku barisan yang baru

n = banyaknya suku barisan semula

Contoh 3.15

Tentukan barisan geometri yang terbentuk pada soal-soal berikut ini:

a. di antara bilangan 160 dan 5 disisipkan 4 buah bilangan;

b. di antara $\frac{1}{5}$ dan 125 disisipkan 3 buah bilangan!

Jawab:

a. $x = 160$, $y = 5$, dan $k = 4$ (genap)

$$r = \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}} = \sqrt[5]{\frac{5}{160}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

Jadi, barisan geometri yang baru adalah 160, 80, 40, 20, 10, 5.

b. $x = \frac{1}{5}$, $y = 125$, dan $k = 3$ (ganjil)

Catatan

Untuk k genap, maka $r = \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}}$

Untuk k ganjil, maka $r = \pm \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}}$

$$r = \pm \sqrt[k+1]{\frac{y}{x}} = \pm \sqrt{\frac{125}{1}} = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$$

Jadi, rasio dari barisan geometri yang baru adalah $r = 5$ atau $r = -5$.

Untuk $r = 5$, barisan geometri yang baru adalah $\frac{1}{5}, 1, 5, 25, 125$.

Untuk $r = -5$, barisan geometri yang baru adalah $\frac{1}{5}, -1, 5, -25, 125$.

Latihan 4

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Di antara barisan-barisan bilangan di bawah ini, manakah yang merupakan barisan geometri:
 - a. $1, 4, 9, \dots$
 - b. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \dots$
 - c. $a, \frac{a^3}{b}, \frac{a^5}{b^2}, \dots$
 - d. $2p, \frac{1}{p}, \frac{1}{2p^3}, \dots$
2. Pada suatu barisan geometri diketahui suku ketiganya adalah 4 dan suku kelimanya adalah 16. Tentukan:
 - a. rasio dan suku pertama;
 - b. suku ke-8;
 - c. suku tengah jika banyaknya suku adalah 11!
3. Dari barisan geometri diketahui $U_2 = 27$ dan $U_6 = \frac{1}{3}$. Tentukan 4 suku pertama barisan geometri tersebut!
4. Tiga buah bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah ketiganya adalah 65 dan hasil kalinya adalah 3.375. Tentukan barisan geometri tersebut!
5. Di antara bilangan 6 dan 96 disisipkan 3 bilangan sehingga membentuk barisan geometri. Tentukan barisan geometri yang terbentuk!

2. Deret Geometri

Perhatikan barisan geometri berikut!

a. $1, 2, 4, \dots, 64$

b. $81, 27, 9, \dots, \frac{1}{27}$

Jika barisan geometri tersebut dijumlahkan beruntun, maka akan diperoleh bentuk sebagai berikut:

a. $1 + 2 + 4 + \dots + 64$

b. $81 + 27 + 9 + \dots + \frac{1}{27}$

Bentuk penjumlahan barisan geometri tersebut dinamakan deret geometri.

Bentuk umum deret geometri:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

Untuk menemukan rumus jumlah n suku pertama dari deret geometri (S_n), perhatikan rumusan berikut ini:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

$$r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Sehingga jumlah n suku pertama deret geometri dirumuskan:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ untuk } r < 1, r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ untuk } r > 1, r \neq 1$$

dengan n = banyaknya suku
 a = suku pertama
 r = rasio

Contoh 3.16

Hitunglah jumlah lima suku pertama deret geometri berikut ini:

a. $1 + 4 + 16 + \dots$

b. $48 + 24 + 12 + \dots$

Jawab:

a. $1 + 4 + 16 + \dots$

$a = 1, r = 4$

Karena $r > 1$, maka: $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$$S_5 = \frac{1(4^5 - 1)}{4 - 1}$$

$$= \frac{1.024 - 1}{3}$$

$$= \frac{1.023}{3}$$

$$= 341$$

b. $48 + 24 + 12 + \dots$

Karena $r < 1$, maka: $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

$$S_5 = \frac{48 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{48 \left(1 - \frac{1}{32} \right)}{\frac{1}{2}}$$

$$= 48 \times \frac{31}{32} \times 2$$

$$= 93$$

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Tentukan jumlah deret geometri berikut ini:
 - a. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + \dots + 32$
 - b. $-27 - 9 - 3 - \dots - \frac{1}{9}$
 - c. $1 + \sin 30^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^5 30^\circ$
 - d. $1 - 2p + 4p^2 - \dots + 64p^6$
2. Diketahui suatu deret geometri $4 + 8 + 16 + \dots$. Tentukan:
 - a. suku kedelapan;
 - b. jumlah 8 suku pertama!
3. Dari suatu deret geometri diketahui suku pertamanya adalah 375 dan suku keempatnya adalah 192. Tentukan jumlah lima suku pertamanya!
4. Diketahui deret geometri $\frac{1}{27} + 1 + 27$. Di antara dua suku yang berurutan disisipkan dua suku sehingga membentuk deret geometri yang baru. Tentukan:
 - a. jumlah deret geometri semula;
 - b. jumlah deret geometri yang baru!
5. Dari sebuah deret geometri diketahui $U_2 = 10$, $U_5 = 160$, dan $U_t = 80$. Tuliskan deret tersebut dan hitung jumlahnya!

3. Deret Geometri Tak Hingga

Perhatikan deret geometri berikut ini:

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

Banyak suku-suku penjumlahan pada deret geometri tersebut bertambah terus mendekati tak hingga. Deret geometri seperti itu dinamakan deret geometri tak hingga.

Jumlah dari deret geometri tak hingga dilambangkan dengan S_∞ yang diperoleh dengan proses limit n mendekati tak hingga S_n . Selanjutnya, nilai

$S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ditentukan dengan cara berikut:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1-r} r^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n$$

Tampak bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ditentukan oleh ada tidaknya nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$.

- a. Jika nilai mutlak r kurang dari 1 ($|r| < 1$ atau $-1 < r < 1$), maka $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.

Sehingga diperoleh:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} (0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

Deret geometri tak hingga tersebut mempunyai limit jumlah atau disebut konvergen.

Jadi,
$$S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

- b. Jika nilai mutlak r lebih dari 1 ($|r| > 1$ atau $r < -1$ atau $r > 1$), maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = (\pm\infty). \text{ Sehingga diperoleh:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} (\pm\infty)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm\infty$$

Deret geometri tak hingga tersebut tidak mempunyai limit jumlah atau disebut divergen.

Contoh 3.17

Hitunglah jumlah deret tak hingga berikut ini:

$$25 + 5 + \frac{1}{5} + \dots$$

Jawab:

$$\text{a. } a = 25, r = \frac{1}{5}$$

$$S_n = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{25}{1-\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{25}{\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{125}{4}$$

$$= 31\frac{1}{4}$$

Jadi, jumlah deret $25 + 5 + \frac{1}{5} + \dots$ adalah $31\frac{1}{4}$.

Latihan 6

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Hitunglah jumlah deret geometri tak hingga berikut:
 - a. $4 + 2 + 1 + \dots$
 - b. $6 - 2 + \frac{2}{3} - \dots$
 - c. $1 + 0,1 + 0,01 + \dots$
 - d. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots$
2. Suku ke- n suatu deret geometri ditentukan dengan rumus $U_n = 3^{-n}$. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga tersebut!
3. Diketahui deret geometri tak hingga dengan suku pertama 2 konvergen dengan limit jumlah 3.
 - a. Tentukan rasionya;
 - b. Tuliskan deretnya!

4. Limit jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah $\frac{9}{2}$ dan rasionya adalah $\frac{1}{3}$. Tentukan:
 - a. suku pertama;
 - b. jumlah 4 suku pertamanya!
5. Jumlah dua suku pertama dari deret geometri menurun adalah $\frac{5}{4}$ dan jumlah sampai tak hingga adalah $\frac{9}{4}$. Tentukan empat suku pertama deret geometri tak hingga tersebut!

D. Penerapan Deret Aritmetika dan Deret Geometri

Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang sebenarnya dapat diselesaikan dengan menggunakan deret aritmetika atau deret geometri. Namun, Anda harus mampu mengidentifikasi permasalahan tersebut dan menerjemahkannya ke dalam bahasa matematika. Jika permasalahan tersebut berkaitan dengan penambahan atau pengurangan (selisih) secara tetap, maka dapat diselesaikan dengan menggunakan deret aritmetika. Sedangkan deret geometri dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan perbandingan tetap.

Setelah permasalahan teridentifikasi, Anda harus mampu menyatakan besaran-besaran yang ada dalam permasalahan sebagai variabel-variabel dalam deret, misalnya a sebagai suku pertama, b sebagai beda, dan r sebagai rasio. Selanjutnya adalah merumuskan deret yang merupakan model matematika dari permasalahan, menentukan penyelesaiannya, dan menafsirkan hasil yang diperoleh. Perhatikan contoh 3.18 berikut ini!

Contoh 3.18

Ihsan adalah seorang karyawan perusahaan swasta. Setiap 6 bulan sekali, perusahaan tersebut memberikan kenaikan gaji sebesar Rp100.00,00. Bila gaji Ihsan pada bulan Januari 2008 sebesar Rp1.000.000,00, hitunglah gajinya pada bulan Januari 2012!

Jawab:

Permasalahan tersebut berkaitan dengan penambahan secara tetap. Jadi, Anda harus menggunakan aturan deret aritmetika.

1. Gaji Ihsan pada bulan Januari 2008 adalah U_1 atau a , yaitu sebesar Rp1.000.000,00.
2. Kenaikan gaji sebesar Rp100.00,00 adalah beda (b).
3. Variabel yang akan kita cari adalah gaji Ihsan pada bulan Januari 2012, yaitu U_9 .

Selanjutnya adalah mengubah bahasa permasalahan menjadi model matematika dan mencari penyelesaiannya.

$$U_n = a + (n - 1)b$$

$$U_9 = 1.000.000 + (9 - 1)100.000$$

$$= 1.000.000 + 8(100.000)$$

$$= 1.000.000 + 800.000$$

$$= 1.800.000$$

Jadi, gaji Ihsan pada bulan Januari 2012 sebesar Rp1.800.000,00.

Sekarang, perhatikan kembali permasalahan yang disajikan di awal bab ini.

Contoh 3.19

Pak Danang merupakan seorang peternak ayam di Indonesia. Akibat serangan wabah penyakit flu burung, populasi ayam yang dimilikinya berkurang sepersepuluh setiap 10 hari sekali. Pada hari ke-40, populasi ayamnya tinggal 32.805 ekor. Dapatkah Anda menghitung berapa populasi ayam peliharaan Pak Danang semula?

Jawab:

Permasalahan tersebut berkaitan dengan perbandingan tetap. Jadi, Anda harus menggunakan aturan dalam deret geometri.

1. Ayam Pak Danang semula adalah U_1 atau a , merupakan variabel yang akan kita cari.

2. Setiap 10 hari sekali berkurang $\frac{1}{10}$ atau menjadi $\frac{9}{10}$ dari semula, berarti rasionya adalah $\frac{9}{10}$.

3. Populasi ayam pada hari ke-40 adalah U_{40} , yaitu 32.805 ekor.

Setelah mengidentifikasi semua variabel permasalahan, selanjutnya adalah menyatakan model matematikanya dan menentukan penyelesaiannya.

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_5 = ar^4$$

$$32.805 = a \left(\frac{9}{10} \right)^4$$

$$= a \left(\frac{6.561}{10.000} \right)$$

$$a = 32.805 \left(\frac{10.000}{6.561} \right)$$

$$= 50.000$$

Jadi, populasi ayam Pak Danang semula berjumlah 50.000 ekor.

Tugas Individu

Kerjakan di buku tugas Anda!

Carilah artikel yang berisi permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam bidang pendidikan, kesehatan, ekonomi, maupun dalam bidang lain yang berkaitan dengan konsep barisan dan deret. Nyatakan dalam model matematika, tentukan penyelesaiannya, dan tafsirkan hasilnya!

Latihan 7

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Seorang pelari maraton berlatih setiap hari. Pada hari pertama, ia mampu berlari sejauh 2 km, hari kedua 4 km, hari ketiga 6 km, dan seterusnya. Tentukan jarak yang mampu ia tempuh pada hari ke-20!
2. Fatma menabung di bank sebesar Rp500.000,00. Bank memberikan bunga sebesar 2% per tahun. Hitunglah jumlah tabungan Fatma setelah 6 tahun!
3. Seorang nenek membagikan sejumlah uang kepada cucu-cucunya. Cucu pertama mendapatkan uang sebesar Rp150.000,00 dan cucu terakhir Rp60.000,00. Selisih uang yang diperoleh seorang cucu dengan cucu berikutnya sebesar Rp10.000,00. Tentukan:
 - a. jumlah cucu nenek tersebut;
 - b. jumlah uang yang diterima cucu ketiga;
 - c. jumlah uang yang dibagikan nenek tersebut!
4. Sebuah perusahaan yang sedang berkembang selalu meningkatkan jumlah produknya sebanyak 1.000 unit per bulan. Jika pada bulan Januari 2008, perusahaan tersebut mampu memproduksi 5.000 unit barang, tentukan jumlah barang yang diproduksi pada bulan Desember 2008!
5. Sebuah bola tenis dijatuhkan dari lantai sebuah gedung dengan ketinggian 20 m. Setiap kali setelah memantul, bola tersebut mencapai ketinggian empat per lima dari ketinggian yang dicapai sebelumnya. Tentukan panjang lintasan yang ditempuh bola tersebut sampai berhenti!

**1. Barisan dan deret aritmetika**

a. Rumus suku ke- n : $U_n = a + (n - 1)b$

b. Jumlah n suku pertama: $S_n = \frac{1}{2} n(a + U_n)$ atau $S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)b]$

dengan:

U_n = suku ke- n

S_n = jumlah n suku pertama

a = suku pertama

b = selisih = $U_n - U_{n-1}$

n = banyaknya suku

2. Barisan dan deret geometri

a. Rumus suku ke- n : $U_n = ar^{n-1}$ dengan $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$

b. Jumlah n suku pertama:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ untuk } r < 1, r \neq 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \text{ untuk } r > 1, r \neq 1$$

dengan U_n = suku ke- n

S_n = jumlah n suku pertama

n = banyaknya suku

a = suku pertama

r = rasio

3. Cara memecahkan masalah yang berkaitan dengan deret aritmetika atau geometri:

- mengidentifikasi permasalahan sebagai deret aritmetika atau geometri;
- menyatakan besaran-besaran permasalahan sebagai variabel-variabel dalam deret;
- menyatakan permasalahan dalam model matematika;
- menentukan penyelesaiannya;
- menafsirkan solusi dari hasil yang diperoleh.



Uji Kompetensi

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan benar!

- Dari barisan-barisan berikut ini, manakah yang merupakan barisan aritmetika?
 - $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$
 - $2x, 1, 2(1-x), 3-4x, \dots$
 - $\frac{2}{3}, 1, 1\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \dots$
 - $2, 5+p, 7+2p, 9+3p, \dots$
- Diketahui barisan aritmetika $-6, -3, 0, 3, \dots$. Tentukan:
 - rumus suku ke- n ;
 - $U_7 + U_{10}$!
- Suku tengah dan suku terakhir suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 38 dan 74. Jika suku ke-3 adalah 8, maka tentukan:
 - suku pertama dan beda barisan tersebut;
 - banyak suku pada barisan tersebut!
- Diketahui jumlah deret aritmetika $-4 - 2 + 0 + 2 + \dots$ adalah 2.250. Tentukan:
 - banyaknya suku deret tersebut;
 - suku terakhirnya!
- Dari barisan-barisan berikut ini, manakah yang merupakan barisan geometri?
 - $2, \frac{2a}{3}, \frac{2a^2}{9}, \frac{2a^3}{27}, \dots$
 - $1, 2\sqrt{3}, 12, 24\sqrt{3}, \dots$
 - $1, \frac{p}{2}, \frac{p^2}{3}, \frac{p^3}{4}, \dots$
 - $\sqrt{2}x, 2x, 2\sqrt{2}x, 4x, \dots$
- Tentukan barisan geometri yang terbentuk pada soal-soal berikut ini:
 - Di antara bilangan 5 dan 160 disisipkan 4 buah bilangan;
 - Di antara 125 dan $\frac{1}{5}$ disisipkan 3 buah bilangan!
- Pada suatu barisan geometri diketahui suku keduanya adalah $\frac{1}{4}$ dan suku kelimanya adalah 2. Tentukan:
 - rasio dan suku pertama;
 - suku tengah jika banyaknya suku adalah 15!
- Diketahui suatu deret geometri $\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + \dots$. Tentukan jumlah 10 suku pertamanya!

9. Dari sebuah deret geometri diketahui $U_2 = \frac{1}{2}$, $U_6 = 8$, dan $U_t = 4$.
Tuliskan deret tersebut dan hitung jumlahnya!
10. Hitunglah jumlah deret geometri tak hingga berikut:
 - a. $9 + 3 + 1 + \dots$
 - b. $8 - 4 + 2 + \dots$
 - c. $2 + 0,2 + 0,02 + \dots$
 - d. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$
11. Diketahui deret geometri tak hingga dengan suku pertama 64 konvergen dengan limit jumlah 128. Tentukan rasio dan deretnya!
12. Setiap pagi nenek berolahraga jalan santai mengelilingi desa. Hari pertama, nenek mampu menempuh jarak 700 m, hari kedua 900 m, hari ketiga 1.000 m, dan seterusnya. Berapa jarak yang ditempuh nenek pada hari ke-15?
13. Andi membagikan seluruh gaji pertamanya kepada adik-adiknya. Adik yang pertama mendapatkan uang sebesar Rp110.000 dan adik yang terakhir Rp20.000,00. Selisih uang yang diterima seorang adik dengan adik berikutnya sebesar Rp15.000,00. Tentukan:
 - a. jumlah adik Andi;
 - b. jumlah gaji pertama Andi!
14. Diperkirakan jumlah penduduk suatu kota tertentu dalam 5 tahun naik 5% setiap tahun. Berapakah persentase kenaikan penduduk kota tersebut setelah 5 tahun?
15. Sebuah bola tenis dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 1 m. Setiap kali setelah memantul, bola tersebut mencapai ketinggian tiga per empat dari ketinggian yang dicapai sebelumnya. Tentukan panjang lintasan yang ditempuh bola tersebut sampai berhenti!

Pengayaan

Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Buktikan bahwa apabila sisi-sisi segitiga siku-siku dapat membentuk deret aritmetika, maka perbandingannya adalah $3 : 4 : 5$!
2. Dua suku pertama dari deret geometri adalah $\frac{x}{1+y}$ dan $\frac{x}{(1+y)^2}$.
Buktikan bahwa jumlah n suku dari deret geometri tersebut ditentukan dengan rumus: $S_n = x \left(\frac{1 - (1+y)^{-n}}{y} \right)$!

I. Pilihlah jawaban yang benar!

1. Sebuah kapal memiliki kapasitas maksimum 1.000 orang penumpang. Setiap penumpang kelas eksekutif boleh membawa barang maksimum 50 kg dan kelas ekonomi 30 kg. Kapal tersebut hanya dapat mengangkut 3.000 kg barang. Model matematika yang tepat untuk menyatakan situasi tersebut adalah
 - a. $x + y \leq 1.000, 50x + 30y \geq 3.000, x \geq 0, y \geq 0$
 - b. $x + y \leq 1.000, 50x + 30y \leq 3.000, x \geq 0, y \geq 0$
 - c. $x + y \leq 1.000, 50x + 30y \geq 3.000, x \leq 0, y \leq 0$
 - d. $x + y \leq 1.000, 50x + 30y \leq 3.000, x \leq 0, y \leq 0$
 - e. $x + y \leq 1.000, 50x + 30y \leq 3.000, x \leq 0, y \geq 0$
2. Nilai maksimum dari fungsi $z = 3x + 2y$ dengan kendala $x + y \geq 3, x + y \leq 6, 2 \leq x \leq 4$, dan $y \geq 0$ adalah
 - a. 18
 - b. 16
 - c. 14
 - d. 10
 - e. 8
3. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Nilai $|A| + 2|B|$ adalah
 - a. -2
 - b. 0
 - c. 2
 - d. 4
 - e. 6
4. Jika diketahui $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 17 & 15 \\ 26 & 24 \end{pmatrix}$, maka matriks X adalah
 - a. $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
 - b. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
 - c. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
 - d. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
 - e. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

5. Suatu barisan bilangan mempunyai aturan $U_n = 2n^2 + 5n$. Suku ke-13 bernilai
 - a. 403
 - b. 384
 - c. 344
 - d. 288
 - e. 253
6. Rumus suku ke- n dari barisan 4, 1, -2, -5, ... adalah
 - a. $9 - 2n$
 - b. $7 - 3n$
 - c. $6 - 5n$
 - d. $5 - 2n$
 - e. $5 - 3n$
7. Suatu barisan bilangan mempunyai rumus suku ke- n sebagai berikut:
 $U_n = 2(3n^2 - 2)$. Nilai $U_5 + U_2$ adalah
 - a. 166
 - b. 170
 - c. 175
 - d. 188
 - e. 190
8. Banyaknya bilangan di antara 101 sampai dengan 1.000 yang habis dibagi 3 adalah
 - a. 500
 - b. 450
 - c. 400
 - d. 300
 - e. 200
9. Di antara bilangan 2 dan 50 disisipkan 5 bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika. Beda barisan yang baru adalah
 - a. 3
 - b. 5
 - c. 6
 - d. 8
 - e. 10
10. Jumlah 15 suku pertama dari $-2 + 0 + 2 + 4 + \dots$ adalah
 - a. 128
 - b. 150
 - c. 156
 - d. 168
 - e. 180
11. Di antara barisan-barisan bilangan di bawah ini, yang merupakan barisan geometri adalah
 - a. $x, x + 2, x + 4, \dots$
 - b. $3, 6x, 12x^2, \dots$
 - c. $2, 3x, 4x, \dots$
 - d. $x, 2x^2, 3x^3, \dots$
 - e. xy, xy^2, x^2y, \dots

12. Suku kedelapan dari deret $4 + 8 + 16 + \dots$ adalah
- 512
 - 500
 - 484
 - 464
 - 450
13. Jumlah 7 suku pertama deret $9 - 6 + 4 - \dots$ adalah
- $\frac{440}{81}$
 - $\frac{458}{81}$
 - $\frac{463}{81}$
 - $\frac{472}{81}$
 - $\frac{475}{81}$
14. Barisan $\frac{1}{5}(a-4), a-4, 2a-5, \dots$ merupakan barisan geometri jika nilai a adalah
- 22
 - 13
 - 10
 - 5
 - 3
15. Jumlah dari deret geometri tak hingga $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \dots$ adalah
- $\frac{1}{9}$
 - $\frac{1}{8}$
 - $\frac{1}{6}$
 - $\frac{1}{5}$
 - $\frac{1}{4}$

II. Kerjakan dengan benar!

- Manakah di antara pertidaksamaan di bawah ini yang merupakan pertidaksamaan linear dua variabel?
 - $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \geq 6$ dan $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} \geq 4$

- b. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} \leq 12$ dan $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} \leq 8$
- c. $x(1 + y) \leq 2$
- d. $10 + 4x > 2y$
2. Andi membeli 3 kg rambutan dan 2 kg belimbing dengan harga total Rp35.000,00, sedangkan Iwan membayar Rp47.000,00 untuk 4 kg rambutan dan 3 kg belimbing. Dengan menggunakan invers matriks, tentukan harga rambutan dan belimbing tiap 1 kg!
 3. Suatu barisan bilangan mempunyai rumus suku ke- n sebagai berikut:
 $U_n = 3(2n^2 + 5)$. Tentukan:
 - a. $U_6 + U_2$;
 - b. nilai n untuk $U_n = 90$!
 4. Diketahui bilangan asli antara 200 dan 500. Tentukan banyaknya suku yang:
 - a. habis dibagi 2;
 - b. habis dibagi 5;
 - c. habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 5!
 5. Tiga buah bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah ketiganya adalah 52 dan hasil kalinya adalah 1.728.
 - a. Tentukan rasionya!
 - b. Tuliskan barisan geometri tersebut!
 6. Diketahui suatu deret geometri $3 + 9 + 27 + \dots$. Tentukan:
 - a. suku ketujuh;
 - b. jumlah 9 suku pertama!
 7. Seorang pembalap berlatih setiap hari di sebuah sirkuit. Pada hari pertama ia mampu menempuh jarak 3 km dalam waktu 5 menit. Dalam waktu yang sama, ia mampu menempuh jarak 5 km pada hari kedua, 7 km pada hari ketiga, dan seterusnya. Berapakah jarak yang mampu ia tempuh pada akhir minggu kedua dalam waktu 5 menit?
 8. Irfan menyetujui untuk bekerja paruh waktu dengan gaji Rp50.000,00 pada minggu pertama, Rp100.000,00 pada minggu kedua, Rp200.000,00 pada minggu ketiga, dan seterusnya. Berapakah gaji yang diterimanya pada akhir minggu ke-13?

- Ayres, Frank jr, Schmidt, Philip A, Hademenos, George J. *Matematika Universitas*. 2003. Jakarta: Erlangga.
- BSNP. 2008. *Sosialisasi Penilaian Standar Buku Teks Pelajaran 2008 (Periode 1)*. Jakarta: BSNP.
- Cullen, Charles G. 1993. *Aljabar Linear dengan Penerapannya (diterjemahkan oleh Bambang Sumantri)*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Edi Kusnaedi, dkk. 2007. *Soal-soal Pemantapan Ujian Nasional*. Bandung: Yrama Widya.
- Lipschutz, Seymour. 1988. *Matematika Hingga edisi SI (diubah ke satuan SI oleh Hall, George G.)*. Jakarta: Erlangga.
- Sembiring, Suwah. 2002. *Buku Pintar Matematika untuk SMU*. Bandung: Yrama Widya.
- _____. 2002. *Olimpiade Matematika*. Bandung: Yrama Widya.
- Siswanto. 2005. *Matematika Inovatif 3 Konsep dan Aplikasinya*. Solo: PT. Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.
- Spiegel, Murray R. *Matematika Dasar (diterjemahkan oleh Kasir Iskandar)*. 1995. Jakarta: Erlangga.
- ST Negoro dan B. Harahap. 2005. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.
- Suke Silverus. 1991. *Evaluasi Hasil Belajar dan Umpan Balik*. Jakarta: Grasindo.
- Wahyudin dan Sudrajat. 2002. *Ensiklopedia Matematika dan Peradaban Manusia*. Tarity Samudra Berlian.
- Weber, Jean E. *Analisis Matematika Penerapan Bisnis dan Ekonomi jilid 2*. 1991. Jakarta: Erlangga.

A

aritmetika 79, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, , 92, 93, 94, 105, 108, 109, 110

B

barisan 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 107, 108, 109

barisan aritmetika 79, 84, , 85, 86, 87, 89, 90, 91, 109

barisan bilangan 80, 81, 83, 84, 90, 91, 94, 99

barisan geometri 79, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 109

beda 32, 84, 85, 88, 89, 90, 105, 109

D

deret 79, 80, 82, 83, 84, 85, 91, 92, 93, 94, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110

deret aritmetika 84, 85, 91, 92, 93, 94, 105, 108, 109, 110

deret geometri 79, 94, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 110

determinan 27, 51, 52, 53, 54, 58, 65, 66, 67, 68, 70, 76, 71, 78, 79

determinan matriks 27, 51, 52, 53, 54, 76, 78

diagonal 32, 33, 37, 52

diagonal kedua 32

diagonal utama 32, 33, 52

divergen 103

E

elemen matriks 30, 34, 38, 42, 51, 70

F

fungsi objektif 1, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 77

G

geometri 79, 93, 94, 95, 96, 97, , 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 108, 109, 110

geometri tak hingga 79, 102, 103, 104, 105, 110

H

himpunan penyelesaian 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 65, 66, 67, 68, 73, 74, 76, 77, 78

I

invers matriks 27, 51, 54, 55, 58, 61, 63, 65, 67, 68, 70, 71, 72, 78, 79

K

kofaktor 58, 59, 60

konvergen 103, 104, 110

M

matriks 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 76, 78, 79

model matematika 1, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 24, 67, 68, 72, 74, 77, 105, 106, 107, 108

N

nilai optimum 1, 16, 19, 23

O

optimasi 11, 17, 22

ordo 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 38, 40, 43, 51, 52, 54, 55, 56, 58, 61, 62, 69, 70, 72

P

penyelesaian optimum 16

pertidaksamaan linear 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 77

program linear 1, 2, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 22

R

rasio 94, 95, 98, 99, 100, 104, 105, 106, 108, 109, 110

S

sisipan 79, 89, 97, 98

sistem pertidaksamaan linear 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 17, 22, 24, 77

barisan aritmetika	:	barisan yang selisih antara dua suku yang berurutan selalu sama
barisan geometri	:	barisan yang antardua suku yang berurutan mempunyai rasio tetap
barisan	:	susunan bilangan yang memiliki pola atau aturan tertentu
deret	:	bentuk penjumlahan barisan
determinan matriks	:	nilai tunggal yang diperoleh dari mengalikan elemen pada diagonal utama dikurangi hasil perkalian elemen-elemen diagonal kedua
fungsi objektif	:	fungsi yang akan ditentukan nilai optimumnya pada program linear
matriks identitas	:	matriks diagonal yang semua nilai elemen pada diagonal utamanya sama dengan positif satu, sedangkan elemen lainnya nol
matriks nol	:	matriks yang semua elemennya bernilai nol
matriks	:	susunan bilangan yang berbentuk empat persegi panjang yang terdiri atas baris dan kolom dan terletak di antara dua tanda kurung
optimasi	:	proses mencari nilai maksimum atau minimum suatu fungsi
ordo matriks	:	ukuran matriks yang menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom
pertidaksamaan linear dua variabel	:	pertidaksamaan yang memuat dua variabel berpangkat satu
program linear	:	suatu metode untuk memecahkan masalah optimasi
rasio	:	perbandingan antara dua suku yang berurutan
sistem pertidaksamaan linear dua variabel	:	hubungan yang memuat dua atau lebih pertidaksamaan linear dua variabel dengan variabel-variabel yang sama

Kunci Jawaban

BAB 1

PROGRAM LINEAR

Uji Kompetensi

1. b dan d
3. a. $3x + 5y \leq 15$, $5x + 3y \leq 15$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ dengan $x, y \in R$
b. $2x - 3y \geq -6$, $x + 2y \geq 4$, $3x + 2y \leq 12$ dengan $x, y \in R$
5. $3x + 4y \leq 120$ dengan x = banyaknya soal tipe I dan y = banyaknya soal tipe II
7. $z = 160$
9. a.

Titik (x, y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
Nilai $x + 2y$	3	5	7	9	4	6	8	10	5

- b. Nilai maksimum = 10 pada titik (2, 4)
Nilai minimum = 3 pada titik (1, 1)
11. 50 buku teks A dan 40 buku teks B
13. Rp107.000,00
15. Rp19.500,00

BAB II

MATRIKS

Uji Kompetensi

1. 13
3. -6
5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
7. $x = 4$ dan $y = 1$

9. $\begin{pmatrix} 3 & -\frac{4}{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

11. -3 dan 4

13. $a = 1$, $b = 2$, dan $c = 3$

15. Rambutan = Rp5.000,00 dan duku = Rp8.000,00.

Uji Semester Gasal

I. Pilihan Ganda

1. c

3. a

5. b

7. d

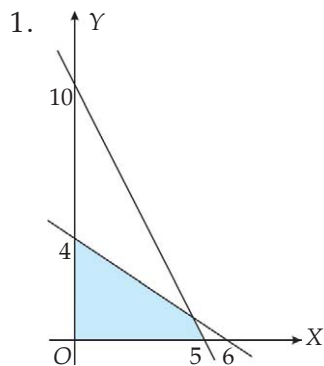
9. a

11. d

13. b

15. c

II. Uraian



3. $x + y \leq 50$

$5x + 20y \leq 200$

$x \geq 0$, $y \geq 0$ dengan $x, y \in C$

5. $z = 48$

7. $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{17}{8} \\ -\frac{7}{4} & \frac{11}{8} \end{pmatrix}$

9. a. $\{-2, 5\}$

b. $\{4, -3\}$

BAB III

BARISAN DAN DERET

Uji Kompetensi

1. b dan c
3. a. $a = 2, b = 3$
b. 25
5. a dan b
7. a. $r = 2, a = \frac{1}{8}$
b. 16
9. Deret: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$
11. $r = \frac{1}{2}$
Deret: $64 + 32 + 16 + 8 + \dots$
13. a. 7 orang
b. Rp455.000,00
15. $7m$

Uji Semester Genap

I. Pilihan Ganda

1. b
3. c
5. a
7. a
9. d
11. b
13. c
15. d

II. Uraian

1. b dan d
3. a. 16
b. 25
5. a. $r = 3$
b. 4, 12, 36
7. 29 km

MATEMATIKA

Untuk SMA/MA Program Studi Bahasa Kelas XII

Apabila sebuah pertanyaan dilontarkan kepada siswa, bagaimana pendapat Anda tentang Matematika? Beragam jawaban mereka, dari Matematika sulit, membuat pusing, membosankan, sampai dengan Matematika menakutkan. Namun, coba bayangkan jika manusia tidak mengenal Matematika! Apakah perkembangan IPTEK dapat semaju dan sepesat ini?

Buku ini mencoba menjelaskan teori-teori Matematika dengan lugas dan mengaitkan setiap konsep dengan peristiwa sehari-hari. Masalah-masalah kontekstual dan pendekatan pemecahan masalah menjadi fokus dalam penyajian setiap konsep dalam buku ini. Dengan mengajukan masalah kontekstual, siswa dibimbing untuk menguasai konsep Matematika.

Dalam buku ini disajikan berbagai permasalahan dan tugas-tugas individu sehingga siswa dapat dibekali dengan kemampuan berpikir logis, sistematis, kritis, dan kreatif. Diharapkan kelak para siswa dapat menguasai dan menciptakan teknologi di masa depan. Selain itu, dalam buku ini juga disajikan tugas kelompok yang dirancang untuk menumbuhkan kemampuan bekerja sama dan sikap ilmiah siswa. Dengan demikian, kemampuan kognitif, afektif, dan psikomotorik siswa dapat terbentuk secara optimal.

Semoga dengan hadirnya buku ini, Matematika dapat dekat, melekat, dan memikat di hati siswa. **Selamat Belajar Semoga Kesuksesan Menyertai Anda!**

ISBN 978-979-068-846-9 (no. jilid lengkap)

ISBN 978-979-068-852-0

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor: 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

Harga Eceran Tertinggi: Rp7.398,--